

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ 2012

ΘΕΜΑ 14ο :

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{|1 - \ln x|}{x}$, $x > 0$

- α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
 β) Αν η τετμημένη του σημείου $M(x, f(x))$ μεταβάλλεται με ρυθμό $1 \mu/\text{sec}$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού $E(t)$ του τριγώνου AOB , όπου $A(x, 0)$, $O(0, 0)$, $B(0, f(x))$, τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία είναι $x(t_0) = 4$
 γ) Αν τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σημείο M βρίσκεται στη θέση $(1, 1)$, τότε να αποδείξετε ότι:
 i) $x(t) = t + 1$
 ii) Η συνάρτηση $E(t)$ είναι κοίλη στο διάστημα $[e - 1, +\infty)$

ΛΥΣΗ

α) Για $0 < x < e$ έχουμε:

$$0 < x < e \Rightarrow \overset{\ln \uparrow}{\ln x} < \ln e \Rightarrow \ln x < 1 \Rightarrow 1 - \ln x > 0, \text{ οπότε } |1 - \ln x| = 1 - \ln x$$

Για $x \geq e$ έχουμε:

$$x \geq e \Rightarrow \overset{\ln \uparrow}{\ln x} \geq \ln e \Rightarrow \ln x \geq 1 \Rightarrow 1 - \ln x \leq 0, \text{ οπότε } |1 - \ln x| = \ln x - 1$$

Επομένως ο τύπος της συνάρτησης f είναι:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \ln x}{x}, & 0 < x < e \\ \frac{\ln x - 1}{x}, & x \geq e \end{cases}$$

Για $0 < x < e$ η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, ως πηλίκο παραγωγισίμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1 - \ln x}{x} \right)' = \frac{(1 - \ln x)' \cdot x - (1 - \ln x) \cdot (x)'}{x^2} = \\ &= \frac{-\frac{1}{x} \cdot x - (1 - \ln x) \cdot 1}{x^2} = \frac{\ln x - 2}{x^2} < 0 \end{aligned}$$

- Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_3 = [e^2, +\infty)$
- Η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = e$ με ελάχιστη τιμή $f(e) = 0$
- Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 = e^2$ με τιμή $f(e^2) = e^{-2}$

β) Το εμβαδό του τριγώνου AOB είναι:

$$E = \frac{1}{2} \cdot (OA) \cdot (OB) = \frac{1}{2} \cdot |x| \cdot |f(x)| = \frac{1}{2} \cdot \left| x \cdot \frac{1 - \ln x}{x} \right| = \frac{|1 - \ln x|}{2}$$

Άρα:

$$E(t) = \frac{|1 - \ln x(t)|}{2}$$

Επειδή $x(t_0) = 4 > e$ το $1 - \ln x(t_0) < 0$

Άρα για $x(t) > e$ έχουμε:

$$E(t) = \frac{\ln x(t) - 1}{2} \quad \text{και} \quad E'(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x(t)} \cdot x'(t)$$

Άρα τη χρονική στιγμή t_0 με $x(t_0) = 4$ είναι:

$$E'(t_0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x(t_0)} \cdot x'(t_0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{8} \text{ τ.μ/sec}$$

γ) i) Για $t \geq 0$ έχουμε:

$$x'(t) = 1 \Leftrightarrow x(t) = t + c$$

Για $t = 0$ είναι:

$$x(0) = 0 + c \stackrel{x(0)=1}{\Leftrightarrow} c = 1$$

Επομένως:

$$x(t) = t + 1, \quad t \geq 0$$

ii) Για $t \geq e-1$ έχουμε:

$$E(t) = \frac{|1 - \ln(t+1)|}{2} = \frac{\ln(t+1) - 1}{2}$$

Για $t > e-1$ έχουμε:

$$E'(t) = \frac{1}{2(t+1)} > 0 \quad \text{και} \quad E''(t) = -\frac{1}{2(t+1)^2} < 0$$

Η συνάρτηση $E(t)$ είναι συνεχής στο $[e-1, +\infty)$ και $E''(t) < 0$ για κάθε $t \in (e-1, +\infty)$

άρα η συνάρτηση $E(t)$ είναι κοίλη στο διάστημα $[e-1, +\infty)$

ΘΕΜΑ 15ο :

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & , x \in (0, 1] \\ e^{x-1} - 1 & , x \in (1, +\infty) \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \int_{\frac{1}{2}}^x f(t) dt$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ με $f'(1) = 1$

β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g

γ) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ και ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης g

ε) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες στο διάστημα $(0, +\infty)$

στ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι κοίλη στο $(0, \frac{1}{e}]$ και κυρτή στο $[\frac{1}{e}, +\infty)$

ΛΥΣΗ

α) • Για $x \in (0, 1)$ είναι $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x \ln x - 0}{x - 1} = \frac{x \ln x}{x - 1}$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x \ln x}{x - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{D.L.H} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x \ln x)'}{(x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln x + x \cdot \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (\ln x + 1) = 1$$

• Για $x \in (1, +\infty)$ είναι $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{e^{x-1} - 1 - 0}{x - 1} = \frac{e^{x-1} - 1}{x - 1}$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{x-1} - 1}{x - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{D.L.H} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(e^{x-1} - 1)'}{(x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{x-1} (x - 1)'}{1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{x-1} = e^0 = 1$$

Άρα η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ με $f'(1) = 1$

β) • Για $x \in (0, 1]$ είναι:

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{\frac{1}{2}}^x f(t) dt = \int_{\frac{1}{2}}^x t \ln t dt = \int_{\frac{1}{2}}^x \left(\frac{t^2}{2}\right)' \ln t dt = \left[\frac{t^2}{2} \ln t\right]_{\frac{1}{2}}^x - \int_{\frac{1}{2}}^x \frac{t^2}{2} (\ln t)' dt = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{8} \ln \frac{1}{2} - \int_{\frac{1}{2}}^x \frac{t^2}{2} \cdot \frac{1}{t} dt = \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{1}{8} \ln 2 - \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^x t dt = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{1}{8} \ln 2 - \frac{1}{2} \left[\frac{t^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^x = \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{1}{8} \ln 2 - \frac{1}{4} \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} \ln 2$$

• Για $x \in (1, +\infty)$ είναι:

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{\frac{1}{2}}^x f(t) dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t) dt + \int_1^x f(t) dt = g(1) + \int_1^x (e^{t-1} - 1) dt = \\ &= \frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} \ln 2 + \int_1^x e^{t-1} (t-1)' dt - \int_1^x 1 dt = \\ &= -\frac{3}{16} + \frac{1}{8} \ln 2 + [e^{t-1}]_1^x - 1 \cdot (x-1) = \\ &= -\frac{3}{16} + \frac{1}{8} \ln 2 + e^{x-1} - e^0 - x + 1 = e^{x-1} - x - \frac{3}{16} + \frac{1}{8} \ln 2 \end{aligned}$$

Άρα ο τύπος της συνάρτησης g είναι:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} \ln 2, & x \in (0, 1] \\ e^{x-1} - x - \frac{3}{16} + \frac{1}{8} \ln 2, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

γ) i) Για $x \in (0, 1)$ είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} \ln 2 \right) = 0 - 0 + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} \ln 2 = \frac{1}{16} + \frac{1}{8} \ln 2, \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^2}{2} \ln x \right) \stackrel{0 \cdot (-\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{2x^{-2}} \stackrel{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{(2x^{-2})'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-4x^{-3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{4} x^2 \right) = 0$$

ii) Για $x \in (1, +\infty)$ είναι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{x-1} - x - \frac{3}{16} + \frac{1}{8} \ln 2 \right) = +\infty, \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{x-1} - x) \stackrel{+\infty - \infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\frac{e^{x-1}}{x} - 1 \right) \right] = +\infty, \text{ αφού}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x-1}}{x} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^{x-1})'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x-1}(x-1)'}{1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{e} \cdot e^x \right) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{x-1}}{x} - 1 \right) = +\infty$$

δ) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, αφού είναι συνεχής:

- ο στο $(0, 1)$, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων
- ο στο $(1, +\infty)$, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων (η e^{x-1} είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών)
- ο στο σημείο $x_0=1$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό από (α) πρώτο.

Επομένως η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$g'(x) = \left(\int_{\frac{1}{2}}^x f(t) dt \right)' = f(x), \quad x > 0$$

Παρατηρούμε ότι:

- Για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $f(x) = x \ln x < 0$
- Για κάθε $x \in (1, +\infty)$ είναι $f(x) = e^{x-1} - 1 > 0$
- Για $x=1$ είναι $f(1) = 1 \cdot \ln 1 = 0$

Άρα

- $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (1, +\infty)$
- $g'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0, 1)$
- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Το πρόσημο της $g'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		0	+
$g(x)$		$g(1)$	

ελάχιστο

Είναι:

$$g(1) = \frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} \ln 2 - \frac{1}{8} \ln 2 - \frac{3}{16} = \frac{\ln 4 - 3}{16} = \frac{1}{16} \ln \frac{4}{e^3} < 0, \text{ αφού } 0 < \frac{4}{e^3} < 1$$

- Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0, 1]$
- Η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1, +\infty)$
- Η συνάρτηση g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$ με ελάχιστη τιμή $g(1) = \frac{1}{16} \ln \frac{4}{e^3}$

Το σύνολο τιμών της συνάρτησης g είναι:

$$g(\Delta) = g(\Delta_1) \cup g(\Delta_2)$$

- Η συνάρτηση g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0, 1]$, οπότε είναι:

$$g(\Delta_1) = \left[g(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \right) = \left[\frac{1}{16} \ln \frac{4}{e^3}, \frac{1}{16} + \frac{1}{8} \ln 2 \right)$$

- Η συνάρτηση g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1, +\infty)$, οπότε είναι:

$$g(\Delta_2) = \left[g(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right) = \left[\frac{1}{16} \ln \frac{4}{e^3}, +\infty \right)$$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης g είναι:

$$g(\Delta) = g(\Delta_1) \cup g(\Delta_2) = \left[\frac{1}{16} \ln \frac{4}{e^3}, +\infty \right)$$

ε) Είναι:

- $g\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) dt = 0$, άρα ο αριθμός $\frac{1}{2}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $g(x) = 0$ στο διάστημα $(0, 1]$

και μάλιστα μοναδική, αφού η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό

- Το $0 \in g(\Delta_2)$, άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία ρίζα $\rho \in (1, +\infty)$, ($\rho \neq 1$, αφού $g(1) \neq 0$) και μάλιστα μοναδική, αφού η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1, +\infty)$

Επομένως η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες στο διάστημα $(0, +\infty)$

στ) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, αφού είναι παραγωγίσιμη:

- στο $(0, 1)$, ως γινόμενο παραγωγισίμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = (x \ln x)' = (x)' \ln x + x (\ln x)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

- στο $(1, +\infty)$, ως άθροισμα παραγωγισίμων συναρτήσεων (η e^{x-1} είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων), με

$$f'(x) = (e^{x-1} - 1)' = e^{x-1} (x-1)' = e^{x-1}$$

- στο σημείο $x_0 = 1$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό από (α) ερώτημα, με $f'(1) = 1$

Η συνάρτηση g' είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, αφού η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, με $g''(x) = f'(x)$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

Επομένως

$$g''(x) = f'(x) = \begin{cases} 1 + \ln x & , x \in (0, 1] \\ e^{x-1} & , x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

Είναι:

- $\begin{cases} g''(x) = 0 \\ x \in (0, 1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \ln x = 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = -1 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = e^{-1} \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Rightarrow x = e^{-1}$
- $\begin{cases} g''(x) > 0 \\ x \in (0, 1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \ln x > 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x > -1 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > e^{-1} \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Rightarrow e^{-1} < x < 1$

- $\begin{cases} g''(x) = 0 \\ x \in (1, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x-1} = 0 \\ x > 1 \end{cases}$, αδύνατη εξίσωση
- $\begin{cases} g''(x) > 0 \\ x \in (1, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x-1} > 0 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow x > 1$

Το πρόσημο της $g''(x)$ καθώς και η κυρτότητα της g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	0	e^{-1}	1	$+\infty$
$g''(x)$		-	0	+
$g(x)$		∩		∪

Είναι $\begin{cases} g \text{ συνεχής στο } \left(0, \frac{1}{e}\right] \\ g''(x) < 0 \text{ στο } \left(0, \frac{1}{e}\right) \end{cases}$

Άρα η συνάρτηση g είναι κοίλη στο διάστημα $\left(0, \frac{1}{e}\right]$

Είναι:

- $g''(x) > 0$ στο $\left(\frac{1}{e}, 1\right) \cup (1, +\infty)$ και
- η C_g δέχεται μη κατακόρυφη εφαπτομένη στο $x_0 = 1$, αφού η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό

Άρα η συνάρτηση g είναι κυρτή στο διάστημα $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$

ΘΕΜΑ 16ο :

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο, που ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $(f'(x))^2 - 2f'(x) + \frac{1}{x^2+1} = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (1)
- $f'(-1) < 1 < f'(1)$ (2)
- $f(0) = 1$ (3)

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

δ) Αν $h(x) = \ln f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, τότε :

i) Να αποδείξετε ότι $h'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $x \in \mathbb{R}$

ii) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον

άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$ και $x = 1$

iii) Να αποδείξετε ότι $h(x) > \frac{f(x) - x - 1}{x}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$(f'(x))^2 - 2f'(x) + \frac{1}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow (f'(x))^2 - 2f'(x) + 1 = 1 - \frac{1}{x^2+1} \Leftrightarrow$$

$$(f'(x) - 1)^2 = \frac{x^2}{x^2+1} \Leftrightarrow g^2(x) = \frac{x^2}{x^2+1} \quad (4), \text{ όπου } g(x) = f'(x) - 1, x \in \mathbb{R}$$

• Για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ είναι:

$$\frac{x^2}{x^2+1} > 0 \Leftrightarrow g^2(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) \neq 0$$

και επειδή η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$, ως άθροισμα συνεχών, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-\infty, 0)$.

Για $x = -1$ είναι $g(-1) = f'(-1) - 1 < 0$ οπότε $g(x) < 0$, για κάθε $x \in (-\infty, 0)$

Αφού $g(x) < 0$, για κάθε $x \in (-\infty, 0)$, από τη σχέση (4) ισοδύναμα έχουμε:

$$g(x) = -\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} \Leftrightarrow g(x) = -\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} \stackrel{x < 0}{\Leftrightarrow} g(x) = -\frac{-x}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow$$

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow f'(x) - 1 = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \text{ για κάθε } x \in (-\infty, 0)$$

• Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$\frac{x^2}{x^2+1} > 0 \Leftrightarrow g^2(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) \neq 0$$

και επειδή η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, ως άθροισμα συνεχών, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0, +\infty)$.

Για $x = 1$ είναι $g(1) = f'(1) - 1 > 0$ οπότε $g(x) > 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$

Αφού $g(x) > 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$, από τη σχέση (4) ισοδύναμα έχουμε:

$$g(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} \Leftrightarrow g(x) = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow$$

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow f'(x) - 1 = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Για $x = 0$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$(f'(0))^2 - 2f'(0) + 1 = 0 \Leftrightarrow (f'(0) - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow f'(0) - 1 = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 1$$

Άρα $f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow f'(x) = (x + \sqrt{x^2+1})' \Leftrightarrow f(x) = x + \sqrt{x^2+1} + c$$

Για $x=0$ είναι $f(0) = 0 + \sqrt{0+1} + c \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} c = 0$. Άρα $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f(x) = x + \sqrt{1+x^2} > x + \sqrt{x^2} = x + |x| \geq 0$$

Άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (5)

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}} \stackrel{(5)}{>} 0$$

Είναι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R}

Επίσης η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , με:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = \frac{(x)\sqrt{x^2+1} - x(\sqrt{x^2+1})'}{x^2+1} = \\ &= \frac{\sqrt{x^2+1} - x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{x^2+1 - x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} > 0 \end{aligned}$$

Είναι $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η συνάρτηση f είναι κυρτή στο \mathbb{R}

δ) i) Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , με

$$h'(x) = (\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, x \in \mathbb{R}$$

ii) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο \mathbb{R} και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=1$ είναι:

$$E = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x + \sqrt{x^2+1}) dx = \int_0^1 x dx + \int_0^1 \sqrt{x^2+1} dx = I_1 + I_2$$

Είναι:

$$\bullet I_1 = \int_0^1 x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \bullet I_2 &= \int_0^1 \sqrt{x^2+1} \, dx = \int_0^1 (x)' \sqrt{x^2+1} \, dx = \left[x\sqrt{x^2+1} \right]_0^1 - \int_0^1 x(\sqrt{x^2+1})' \, dx = \\ &= \sqrt{2} - \int_0^1 x \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} (x^2+1)' \, dx = \sqrt{2} - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} \, dx = \sqrt{2} - \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{\sqrt{x^2+1}} \, dx = \\ &= \sqrt{2} - \int_0^1 \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} \, dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \, dx = \sqrt{2} - \int_0^1 \sqrt{x^2+1} \, dx + \int_0^1 h'(x) \, dx = \\ &= \sqrt{2} - I_2 + [h(x)]_0^1 = \sqrt{2} - I_2 + h(1) - h(0) = \sqrt{2} - I_2 + \ln f(1) - \ln f(0) = \\ &= \sqrt{2} - I_2 + \ln(1+\sqrt{2}) - \ln 1 = \sqrt{2} - I_2 + \ln(1+\sqrt{2}) \end{aligned}$$

Είναι:

$$I_2 = \sqrt{2} - I_2 + \ln(1+\sqrt{2}) \Leftrightarrow 2I_2 = \sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}), \text{ οπότε } I_2 = \frac{\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})}{2}$$

Επομένως:

$$E = I_1 + I_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})}{2} = \frac{1+\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})}{2} \text{ τ.μ}$$

ii) Θεωρώ συνάρτηση $\Phi(x) = xh(x) - f(x) + x + 1$, $x \in [0, +\infty)$

Η συνάρτηση Φ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$, με

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= (x)'h(x) + xh'(x) - f'(x) + 1 = h(x) + x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right) + 1 = \\ &= h(x) + x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right) + 1 = h(x) \quad (6) \end{aligned}$$

Είναι $h'(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R}

Επομένως, για κάθε $x > 0$ είναι $h(x) > h(0) \Rightarrow h(x) > \ln f(0) \Rightarrow h(x) > \ln 1 \Rightarrow h(x) > 0$ (7)

Από τις σχέσεις (6) και (7) συμπεραίνουμε ότι $\Phi'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

Είναι:

$$\begin{cases} \Phi \text{ συνεχής στο } [0, +\infty) \\ \Phi'(x) > 0 \text{ στο } (0, +\infty) \end{cases}$$

Άρα η συνάρτηση Φ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, οπότε για κάθε $x > 0$ είναι:

$$\Phi(x) > \Phi(0) \Rightarrow xh(x) - f(x) + x + 1 > 0 \cdot h(0) - f(0) + 0 + 1 \stackrel{(3)}{\Rightarrow}$$

$$xh(x) - f(x) + x + 1 > 0 \stackrel{x>0}{\Rightarrow} h(x) > \frac{f(x) - x - 1}{x}$$

Δηλαδή $h(x) > \frac{f(x) - x - 1}{x}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

ΘΕΜΑ 17ο :

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $4f''(x)(f(x))^3 = -1$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ (1)
- $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ (2)
- $2f'(1) = f(1) = 1$ (3)

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

β) Να αποδείξετε ότι $(2f(x)f'(x))^2 = 1$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

γ) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

δ) Αν $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, τότε:

- i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $M(a, f(a))$, με $a > 0$.
- ii) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την εφαπτομένη (ε) και τον άξονα $x'x$.
- iii) Αν ένα σημείο M κινείται στη γραφική παράσταση της f έτσι, ώστε να απομακρύνεται από τον άξονα $y'y$ με ρυθμό 2 μονάδες το δευτερόλεπτο, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E του χωρίου Ω τη χρονική στιγμή κατά την οποία η τετμημένη του είναι ίση με 4 μονάδες.
- iv) Να βρείτε $\lambda \in (-a, a)$ τέτοιο, ώστε η ευθεία με εξίσωση $x = \lambda$ να χωρίζει το χωρίο Ω σε δύο ισοεμβαδικά χωρία.

ΛΥΣΗ

α) Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, +\infty)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$, τότε από τη σχέση (1) έχουμε:

$$4f''(x_0)(f(x_0))^3 = -1 \Rightarrow 4f''(x_0) \cdot 0 = -1 \Rightarrow 0 = -1,$$

που είναι άτοπο. Άρα $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ (4)

β) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$\begin{aligned} 4f''(x)(f(x))^3 &= -1 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} 4f''(x)(f(x))^3 f'(x) = -f'(x) \Leftrightarrow \\ 4f''(x)f'(x) &= -(f(x))^{-3} f'(x) \Leftrightarrow [2(f'(x))^2]' = \left[-\frac{(f(x))^{-2}}{-2} \right]' \stackrel{(4)}{\Leftrightarrow} \\ 2(f'(x))^2 &= \frac{1}{2(f(x))^2} + c \quad (5) \end{aligned}$$

Για $x = 1$ από τη σχέση (5) έχουμε:

$$2(f'(1))^2 = \frac{1}{2(f(1))^2} + c \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + c \Leftrightarrow c = 0 \quad (6)$$

Από τις σχέσεις (5) και (6) έχουμε:

$$2(f'(x))^2 = \frac{1}{2(f(x))^2} \Leftrightarrow 4(f(x))^2(f'(x))^2 = 1 \Leftrightarrow (2f(x)f'(x))^2 = 1 \quad (7)$$

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = 2f(x)f'(x), \quad x \in (0, +\infty)$$

Από τη σχέση (7) έχουμε:

$$g^2(x) = 1, \quad \text{για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

Από τις σχέσεις (2) και (4), έχουμε ότι $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

Άρα η g διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0, +\infty)$ και επειδή $g(1) = 2f(1)f'(1) = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1 > 0$ συμπεραίνουμε ότι $g(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

Επομένως για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$g(x) = 1 \Leftrightarrow 2f(x)f'(x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$(f^2(x))' = (x)' \Leftrightarrow f^2(x) = x + c_1$$

Για $x = 1$ έχουμε:

$$f^2(1) = 1 + c_1 \Leftrightarrow 1 = 1 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0$$

Άρα είναι:

$$f^2(x) = x, \quad x \in (0, +\infty)$$

Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και από τη σχέση (4) έχουμε ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0, +\infty)$ και επειδή $f(1) = 1 > 0$ συμπεραίνουμε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

Επομένως έχουμε:

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x \in (0, +\infty)$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$ ισχύει $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$

Άρα είναι:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \in (0, +\infty) \\ 0, & x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x}, \quad x \in [0, +\infty)$$

δ) i) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $M(\alpha, f(\alpha))$, με $\alpha > 0$ είναι:

$$\varepsilon : y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$$

Είναι:

$$f(\alpha) = \sqrt{\alpha} \quad \text{και} \quad f'(\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$$

Επομένως:

$$\varepsilon : y - \sqrt{\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}(x - \alpha) \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon : x - 2\sqrt{\alpha} \cdot y + \alpha = 0 \quad (7)$$

ii) Το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την εφαπτομένη (ε) και τον άξονα x είναι:

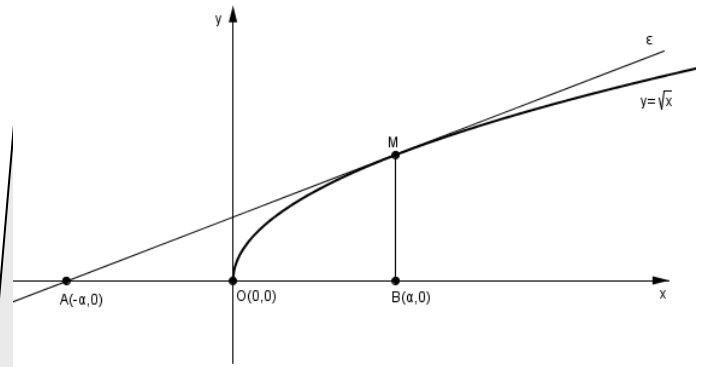
$$E = (AMB) - \int_0^{\alpha} f(x) dx = \frac{1}{2}(AB)(BM) - \int_0^{\alpha} \sqrt{x} dx = \frac{1}{2}(2\alpha)\sqrt{\alpha} - \int_0^{\alpha} x^{\frac{1}{2}} dx =$$

$$= \alpha\sqrt{\alpha} - \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\alpha} =$$

$$= \alpha\sqrt{\alpha} - \left(\frac{2}{3} \alpha^{\frac{3}{2}} - 0 \right) =$$

$$= \alpha\sqrt{\alpha} - \frac{2}{3} \alpha\sqrt{\alpha} = \frac{1}{3} \alpha\sqrt{\alpha}$$

Δηλαδή $E = \frac{1}{3} \alpha\sqrt{\alpha}$ τ.μ.



iii) Έστω ότι την τυχαία χρονική στιγμή t είναι:

- $x_M = \alpha(t)$ (τετμημένη του σημείου M) και
- $E = E(t)$ (εμβαδόν του χωρίου Ω)

Τη χρονική στιγμή t_0 είναι:

- $x_M = \alpha(t_0) = 4$ μονάδες και
- $\alpha'(t_0) = 2$ μονάδες/sec.

Είναι:

$$E(t) = \frac{1}{3} (\alpha(t))^{\frac{3}{2}} \quad \text{και} \quad E'(t) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} (\alpha(t))^{\frac{1}{2}} \alpha'(t) = \frac{1}{2} (\alpha(t))^{\frac{1}{2}} \alpha'(t)$$

Τη χρονική στιγμή t_0 είναι:

$$E'(t_0) = \frac{1}{2} (\alpha(t_0))^{\frac{1}{2}} \alpha'(t_0) = \frac{1}{2} \cdot 4^{\frac{1}{2}} \cdot 2 = 2 \text{ τετραγωνικές μονάδες/sec}$$

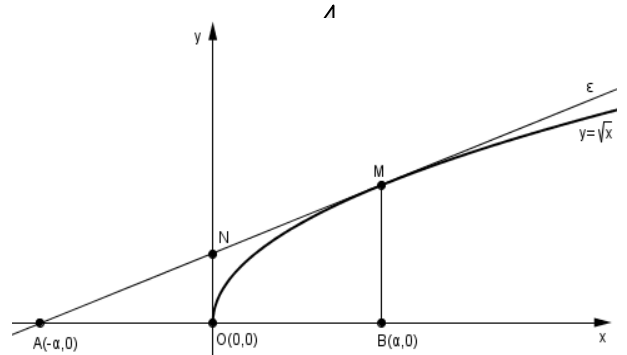
iv) Έστω N το σημείο τομής της εφαπτομένης (ε) και του άξονα y'y.

Για x=0 από τη σχέση (7) έχουμε:

$$y = \frac{\sqrt{\alpha}}{2}, \text{ οπότε } N \left(0, \frac{\sqrt{\alpha}}{2} \right)$$

Το εμβαδόν του τριγώνου OAN είναι:

$$E_1 = (OAN) = \frac{1}{2} (OA)(ON) = \frac{1}{2} \alpha \frac{\sqrt{\alpha}}{2} = \frac{1}{4} \alpha \sqrt{\alpha}$$



Από την προφανή σχέση $\frac{1}{4} \alpha \sqrt{\alpha} > \frac{1}{6} \alpha \sqrt{\alpha}$ προκύπτει ότι $E_1 > \frac{E}{2}$, οπότε η ζητούμενη ευθεία, που χωρίζει το χωρίο Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία, θα έχει εξίσωση $x = \lambda$ με $\lambda \in (-\alpha, 0)$

Έστω ότι η ευθεία με εξίσωση $x = \lambda$ τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο Γ(λ, 0) και την ευθεία ε στο σημείο Δ.

Για $x = \lambda$ από τη σχέση (7) έχουμε

$$y = \frac{\lambda + \alpha}{2\sqrt{\alpha}},$$

$$\text{οπότε } \Delta \left(\lambda, \frac{\lambda + \alpha}{2\sqrt{\alpha}} \right)$$

Είναι:

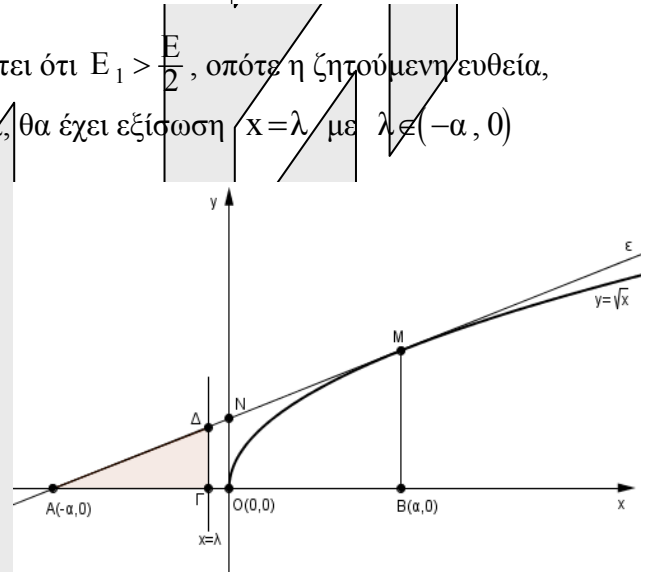
$$E_2 = (A\Gamma\Delta) = \frac{1}{2} (A\Gamma)(\Gamma\Delta) = \frac{1}{2} (\lambda + \alpha) \frac{\lambda + \alpha}{2\sqrt{\alpha}} = \frac{(\lambda + \alpha)^2}{4\sqrt{\alpha}}$$

Έχουμε:

$$E_2 = \frac{E}{2} \Leftrightarrow \frac{(\lambda + \alpha)^2}{4\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \alpha \sqrt{\alpha} \Leftrightarrow \frac{(\lambda + \alpha)^2}{4\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{6} \alpha \sqrt{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$(\lambda + \alpha)^2 = \frac{2}{3} \alpha^2 \Leftrightarrow |\lambda + \alpha| = \frac{\sqrt{6}}{3} |\alpha| \Leftrightarrow \begin{matrix} \lambda + \alpha > 0 \\ \alpha > 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \lambda + \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3} \alpha \Leftrightarrow$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{6}}{3} \alpha - \alpha \Leftrightarrow \lambda = \left(\frac{\sqrt{6}}{3} - 1 \right) \alpha \Leftrightarrow \lambda = \frac{\sqrt{6} - 3}{3} \alpha$$



ΘΕΜΑ 18ο :

Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, οι οποίες ικανοποιούν τις σχέσεις:

- $\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)}{g'(x)}$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$ (1)

- $g^2(x) = g'(x) > 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$ (2)

- $f(1) = 2$

- $g(1) = -1$

α) Να βρείτε τις συναρτήσεις f και g

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις C_f , C_g και τις ευθείες με $x=1$ και $x=2$

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x))^{-\frac{1}{g(x)}}$

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{2e^{x-1}}{f'(x)-1} + \frac{2\ln x + 3}{g'(x)+1} = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα

(1, e)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση $\frac{f(x)}{g(x)}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων, οπότε η σχέση

(1) ισοδύναμα γράφεται

$$\frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (3)$$

Από τη σχέση (2) προκύπτει ότι $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, οπότε

$$g^2(x) = g'(x) \Rightarrow \frac{g'(x)}{g^2(x)} = 1 \Rightarrow \left(-\frac{1}{g(x)} \right)' = (x)' \Rightarrow -\frac{1}{g(x)} = x + c_1$$

Είναι:

$$g(1) = -1, \text{ οπότε } c_1 = 0$$

Άρα:

$$-\frac{1}{g(x)} = x \Rightarrow g(x) = -\frac{1}{x}, \quad x \in (0, +\infty) \quad (4)$$

Η σχέση (3) λόγω των σχέσεων (2) και (4) γράφεται:

$$f'(x)g(x) - g'(x)f(x) = f'(x) \Rightarrow f'(x) \cdot \left(-\frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x^2} f(x) = f'(x) \Rightarrow$$

$$\left(1 + \frac{1}{x} \right) f'(x) = -\frac{1}{x^2} f(x) \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{x} \right) f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x} \right)' f(x) \Rightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{1 + \frac{1}{x}} \right)' = 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{1 + \frac{1}{x}} = c_2 \Rightarrow f(x) = c_2 \left(1 + \frac{1}{x} \right), \quad x \in (0, +\infty)$$

Είναι:

$$f(1) = 2, \text{ οπότε } c_2 = 1$$

Άρα:

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$$

β) Στο διάστημα $[1, 2]$ ισχύει:

$$f(x) - g(x) = 1 + \frac{1}{x} - \left(-\frac{1}{x} \right) = 1 + \frac{2}{x} > 0,$$

οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E = \int_1^2 \left(1 + \frac{2}{x}\right) dx = [x + 2\ln x]_1^2 = 1 + 2\ln 2$$

γ) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} \quad \text{και} \quad g(x) = -\frac{1}{x}$$

οπότε το ζητούμενο όριο λαμβάνει τη μορφή $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ και επειδή για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}, \quad \text{αρκεί να υπολογίσουμε το όριο } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) \right]$$

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) \right] \stackrel{+\infty \cdot 0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = 1, \quad \text{οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^1 = e$$

δ) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad \text{και} \quad g'(x) = \frac{1}{x^2},$$

οπότε

$$f'(x) - 1 = -\left[g'(x) + 1\right] = -\frac{1}{x^2} - 1 \neq 0$$

και η δοθείσα εξίσωση στο διάστημα $[1, e]$ είναι ισοδύναμη με την $2e^{x-1} - 2\ln x - 3 = 0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x) = 2e^{x-1} - 2\ln x - 3, \quad x \in [1, e]$$

Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $h(x) = 0$, έχει μια ακριβώς ρίζα στο διάστημα $(1, e)$

- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[1, e]$, ως άθροισμα συνεχών
- $h(1) = 2 - 3 = -1 < 0$ και $h(e) = 2e^{e-1} - 5 = 2\left(e^{e-1} - \frac{5}{2}\right) > 0$, γιατί $e > \frac{5}{2}$ και $e-1 > 1$,

$$\text{οπότε } h(1) \cdot h(e) < 0$$

Άρα η συνάρτηση h ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano, οπότε η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, e)$.

Για κάθε $x \in (1, e)$ έχουμε:

$$h'(x) = 2\left(e^{x-1} - \frac{1}{x}\right) > 0$$

αφού για $1 < x < e$ είναι:

$$\begin{cases} x-1 > 0 \\ \frac{1}{x} < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{x-1} > 1 \\ -\frac{1}{x} > -1 \end{cases} \stackrel{(+)}{\Rightarrow} e^{x-1} - \frac{1}{x} > 0$$

Άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα, οπότε η εξίσωση $h(x) = 0$ θα έχει μια ακριβώς ρίζα στο διάστημα $(1, e)$

ΘΕΜΑ 19ο :

Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f''(x) - f(x) = (4x+2)e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (1)
- $f'(0) = f(0) = 0$ (2)

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x^2 e^x$, $x \in \mathbb{R}$

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (-1, 1)$ τέτοια, ώστε $f''(\xi_1) \cdot f''(\xi_2) = 3$

ε) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{x-1}^x f(t) dt$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\begin{aligned} f''(x) - f(x) &= (4x+2)e^x \Leftrightarrow f''(x) - f'(x) + f'(x) - f(x) = (4x+2)e^x \Leftrightarrow \\ f''(x)e^{-x} - f'(x)e^{-x} + f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} &= 4x+2 \Leftrightarrow \\ (f'(x))'e^{-x} + f'(x)(e^{-x})' + f'(x)e^{-x} + f(x)(e^{-x})' &= (2x^2+2x)' \Leftrightarrow \\ (f'(x)e^{-x})' + (f(x)e^{-x})' &= (2x^2+2x)' \Leftrightarrow \\ (f'(x)e^{-x} + f(x)e^{-x})' &= (2x^2+2x)' \Leftrightarrow \\ f'(x)e^{-x} + f(x)e^{-x} &= 2x^2 + 2x + c_1 \quad (3) \end{aligned}$$

Για $x = 0$ από τη σχέση (3) έχουμε:

$$f'(0)e^0 + f(0)e^0 = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + c_1 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} c_1 = 0$$

Άρα η σχέση (3) γράφεται:

$$f'(x)e^{-x} + f(x)e^{-x} = 2x^2 + 2x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\begin{aligned} f'(x)e^{-x} + f(x)e^{-x} &= 2x^2 + 2x \Leftrightarrow f'(x)e^x + f(x)e^x = 2x^2 e^{2x} + 2x e^{2x} \Leftrightarrow \\ f'(x)e^x + f(x)(e^x)' &= x^2 (e^{2x})' + (x^2)' e^{2x} \Leftrightarrow (f(x)e^x)' = (x^2 e^{2x})' \Leftrightarrow \\ f(x)e^x &= x^2 e^{2x} + c_2 \quad (4) \end{aligned}$$

Για $x = 0$ από τη σχέση (4) έχουμε:

$$f(0)e^0 = 0 \cdot e^0 + c_2 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} c_2 = 0$$

Άρα η σχέση (4) γράφεται:

$$f(x)e^x = x^2 e^{2x} \Leftrightarrow f(x) = x^2 e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

β) • Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο \mathbb{R} , οπότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

• Για $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x e^x) = +\infty$$

Άρα η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f δεν έχει ασύμπτωτη της μορφής

$$y = \lambda x + \beta$$

στο $+\infty$

• Για $x \in (-\infty, 0)$ είναι:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 e^x) \stackrel{(+\infty) \cdot 0}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2)'}{(e^{-x})'} \stackrel{\text{D.L.H}}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} \stackrel{\frac{-\infty}{-\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x)'}{(-e^{-x})'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^x) = 2 \cdot 0 = 0 \quad (5) \end{aligned}$$

Άρα η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο $-\infty$

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f'(x) = 2xe^x + x^2 e^x = x(x+2)e^x$$

Είναι:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x+2)e^x = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ή $x = 0$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x(x+2)e^x > 0 \Leftrightarrow x < -2$ ή $x > 0$

Το πρόσημο της $f'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0
$f(x)$	0	$4e^{-2}$	0	
		τ. μ.	ο. ε.	

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -2]$ και $[0, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-2, 0]$

Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = -2$ με τιμή $f(-2) = 4e^{-2}$ και ολικό ελάχιστο στο $x_2 = 0$ με ελάχιστη τιμή $f(0) = 0$, αφού $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, (σχέση (5))

δ) Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , ως γινόμενο παραγωγισίμων συναρτήσεων, άρα ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ σε δύο διαστήματα, στα $[-1, 0]$ και $[0, 1]$, οπότε θα υπάρχουν:

$$\bullet \xi_1 \in (-1, 0) \text{ τέτοιο, ώστε } f''(\xi_1) = \frac{f'(0) - f'(-1)}{0 - (-1)} = \frac{0 - (-1) \cdot 1 \cdot e^{-1}}{1} = e^{-1}$$

$$\bullet \xi_2 \in (0, 1) \text{ τέτοιο, ώστε } f''(\xi_2) = \frac{f'(1) - f'(0)}{1 - 0} = \frac{1 \cdot 3 \cdot e - 0}{1} = 3e$$

Άρα έχουμε:

$$f''(\xi_1)f''(\xi_2) = e^{-1} \cdot 3e \Leftrightarrow f''(\xi_1)f''(\xi_2) = 3$$

ε) Για $t \in [x-1, x]$ με $x < -2$ έχουμε:

$$x-1 \leq t \leq x \xrightarrow{f \uparrow} f(x-1) \leq f(t) \leq f(x)$$

Επομένως:

$$\int_{x-1}^x f(x-1) dt \leq \int_{x-1}^x f(t) dt \leq \int_{x-1}^x f(x) dt \Leftrightarrow$$

$$f(x-1) \int_{x-1}^x 1 dt \leq \int_{x-1}^x f(t) dt \leq f(x) \int_{x-1}^x 1 dt \Leftrightarrow$$

$$f(x-1) \cdot (x - (x-1)) \leq \int_{x-1}^x f(t) dt \leq f(x) \cdot (x - (x-1)) \Leftrightarrow$$

$$f(x-1) \leq \int_{x-1}^x f(t) dt \leq f(x)$$

Για $x \in (-\infty, 0)$ είναι:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \text{ (σχέση (5))}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x-1) = \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = 0, \text{ (σχέση (5))}$$

Άρα από το Κριτήριο Παρεμβολής είναι και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{x-1}^x f(t) dt = 0$

ΘΕΜΑ 20ο :

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$\int_1^x f(t) dt + x \ln\left(\frac{x}{4}\right) - x + 1 + 2 \ln 2 = \int_1^x \left(\int_1^u \frac{f(t)}{t+1} dt \right) du, \quad x > 0 \quad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη με $\left(\frac{f(x)}{x+1}\right)' = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}$, $x > 0$ και να βρείτε στη συνέχεια τον τύπο της f

β) Αν $f(x) = (x+1) \ln \frac{x+1}{x}$, $x > 0$, τότε:

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f και να βρείτε το σύνολο τιμών της f

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x+1 = x e^{\frac{2012}{x+1}}$, $x > 0$ έχει μία ακριβώς θετική ρίζα

iii) Να αποδείξετε ότι $f(x) + 2 \ln 2 \geq 2 f\left(\frac{x+1}{2}\right)$, $x > 0$

iv) Να αποδείξετε ότι $\int_x^{2012} t f(t) dt > x \int_x^{2012} f(t) dt$, $x \in (0, 2012)$

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $(0, +\infty)$, άρα η συνάρτηση $\int_1^x f(t) dt$, $x \in (0, +\infty)$

είναι παραγωγίσιμη με $\left(\int_1^x f(t) dt\right)' = f(x)$, $x > 0$.

Η συνάρτηση $\frac{f(t)}{t+1}$ είναι συνεχής στο διάστημα $(0, +\infty)$ ως πηλίκο συνεχών, άρα η συνάρτηση

$g(u) = \int_1^u \frac{f(t)}{t+1} dt$, $u > 0$ είναι παραγωγίσιμη με $g'(u) = \left(\int_1^u \frac{f(t)}{t+1} dt\right)' = \frac{f(u)}{u+1}$, $u > 0$.

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο διάστημα $(0, +\infty)$ ως παραγωγίσιμη, άρα η συνάρτηση

$\int_1^x g(u) du$, $x \in (0, +\infty)$ είναι παραγωγίσιμη με $\left(\int_1^x g(u) du\right)' = g(x)$, $x > 0$.

Επομένως τα μέλη της (1) είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο διάστημα $(0, +\infty)$, άρα παραγωγίζοντας έχουμε:

$$\left(\int_1^x f(t) dt + x \ln\left(\frac{x}{4}\right) - x + 1 + 2 \ln 2\right)' = \left(\int_1^x g(u) du\right)', \text{ οπότε}$$

$$f(x) + \ln\left(\frac{x}{4}\right) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = -\ln\left(\frac{x}{4}\right) + g(x), \quad x > 0 \quad (2)$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$, ως άθροισμα παραγωγίσιμων με

$$f'(x) = -\frac{1}{x} + g'(x) \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{1}{x} + \frac{f(x)}{x+1} \Leftrightarrow f'(x) - \frac{f(x)}{x+1} = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x+1)f'(x) - f(x)}{x+1} = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{(x+1)f'(x) - f(x)}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x(x+1)} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{x+1}\right)' = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x+1}\right)' = (\ln(x+1) - \ln x)' \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(x)}{x+1} = \ln(x+1) - \ln x + c, \quad c \in \mathbb{R}, \quad x > 0 \quad (3)$$

Για $x=1$ από τη σχέση (2) έχουμε $f(1) = -\ln\left(\frac{1}{4}\right) + g(1) \Leftrightarrow f(1) = \ln 4 + 0 \Leftrightarrow f(1) = 2\ln 2$

και από τη σχέση (3) έχουμε $\frac{f(1)}{2} = \ln 2 + c \Leftrightarrow \frac{2\ln 2}{2} = \ln 2 + c \Leftrightarrow c = 0$

Άρα

$$\frac{f(x)}{x+1} = \ln(x+1) - \ln x, \quad x > 0 \Leftrightarrow f(x) = (x+1)\ln \frac{x+1}{x}, \quad x > 0$$

β) i) Η f είναι παραγωγίμη στο $(0, +\infty)$ με

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left((x+1)\ln \frac{x+1}{x} \right)' = (x+1)' \ln \frac{x+1}{x} + (x+1) \left(\ln \frac{x+1}{x} \right)' = \\ &= \ln \frac{x+1}{x} + (x+1) \cdot \frac{x}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1}{x} \right)' = \ln \frac{x+1}{x} + x \cdot \frac{(x+1)'x - (x+1)(x)'}{x^2} = \\ &= \ln \frac{x+1}{x} + \frac{x - (x+1)}{x} = \ln \frac{x+1}{x} - \frac{1}{x}, \quad x > 0 \end{aligned}$$

Η συνάρτηση $g(t) = \ln t$ σε κάθε διάστημα $[x, x+1]$, $x > 0$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ., άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο, ώστε

$$g'(\xi) = \frac{g(x+1) - g(x)}{(x+1) - x} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} = \ln(x+1) - \ln x \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} = \ln \frac{x+1}{x} \quad (4)$$

Είναι:

$$0 < x < \xi < x+1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{\xi} \Leftrightarrow \ln \frac{x+1}{x} < \frac{1}{x} \Leftrightarrow \ln \frac{x+1}{x} - \frac{1}{x} < 0 \quad (5)$$

Λόγω της (5) είναι $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left((x+1) \cdot \ln \frac{x+1}{x} \right) = +\infty$ γιατί $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1$ και

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty, \quad t = \frac{x+1}{x} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[(x+1) \cdot \frac{1}{x} \right] = +\infty$$

Άρα η ευθεία $x=0$ (άξονας $y'y$) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left((x+1) \cdot \ln \frac{x+1}{x} \right) \stackrel{(+\infty) \cdot 0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{x+1}{x}}{\frac{1}{x+1}} \stackrel{\frac{0}{0}}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\ln \frac{x+1}{x} \right)'}{\left(\frac{1}{x+1} \right)'} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1}{x} \right)'}{\left(\frac{1}{x+1} \right)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{x+1} \cdot \frac{(x+1)'x - (x+1)(x)'}{x^2}}{-\frac{1}{(x+1)^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{x+1} \cdot \frac{x - (x+1)}{x^2}}{-\frac{1}{(x+1)^2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{x+1} \cdot \left(\frac{-1}{x^2} \right)}{-\frac{1}{(x+1)^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1
 \end{aligned}$$

Άρα η ευθεία $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.
 Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A = (0, +\infty)$ άρα το σύνολο τιμών της είναι το $f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = (1, +\infty)$

ii) Για $x > 0$ η εξίσωση ισοδύναμα γίνεται:

$$\begin{aligned}
 x+1 = x \cdot e^{\frac{2012}{x+1}} &\Leftrightarrow \frac{x+1}{x} = e^{\frac{2012}{x+1}} \Leftrightarrow \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) = \ln e^{\frac{2012}{x+1}} \Leftrightarrow \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) = \frac{2012}{x+1} \\
 (x+1) \cdot \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) &= 2012 \Leftrightarrow f(x) = 2012 \quad (6)
 \end{aligned}$$

Η f είναι συνάρτηση 1-1, ως γνησίως φθίνουσα στο $A = (0, +\infty)$ και $2012 \in f(A)$, άρα η εξίσωση (6) έχει μία ακριβώς λύση ως προς x στο $A = (0, +\infty)$.

Δηλαδή η εξίσωση $x+1 = x \cdot e^{\frac{2012}{x+1}}$, $x > 0$ έχει μία ακριβώς θετική ρίζα.

iii) 1^{ος} τρόπος: (ανισότητα Jensen) $f(x) + 2 \ln 2 \geq 2f\left(\frac{x+1}{2}\right) \Leftrightarrow f(x) + f(1) \geq 2f\left(\frac{x+1}{2}\right)$ (7)

που ισχύει για κάθε $x > 0$, γιατί η f είναι κυρτή. Πράγματι:

Για $x=1$ η (7) ισχύει ως ισότητα.

Για $x > 1$ η f στα διαστήματα $\left[1, \frac{x+1}{2}\right]$ και $\left[\frac{x+1}{2}, x\right]$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις

του Θ.Μ.Τ., άρα υπάρχουν $\xi_1 \in \left(1, \frac{x+1}{2}\right)$ και $\xi_2 \in \left(\frac{x+1}{2}, x\right)$ τέτοια, ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{x+1}{2}\right) - f(1)}{\frac{x+1}{2} - 1} = \frac{f\left(\frac{x+1}{2}\right) - f(1)}{\frac{x-1}{2}} \quad \text{και}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(x) - f\left(\frac{x+1}{2}\right)}{x - \frac{x+1}{2}} = \frac{f(x) - f\left(\frac{x+1}{2}\right)}{\frac{x-1}{2}}$$

Για κάθε $x > 0$ η f' είναι παραγωγίμη με $f''(x) = \frac{x+1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

Είναι:

$$0 < \xi_1 < \xi_2 \stackrel{f' \uparrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f\left(\frac{x+1}{2}\right) - f(1)}{\frac{x+1}{2} - 1} < \frac{f(x) - f\left(\frac{x+1}{2}\right)}{\frac{x-1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$f\left(\frac{x+1}{2}\right) - f(1) < f(x) - f\left(\frac{x+1}{2}\right) \Leftrightarrow f(x) + f(1) > 2f\left(\frac{x+1}{2}\right) \Leftrightarrow f(x) + 2\ln 2 > 2f\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

Ομοίως αν $0 < x < 1$

Άρα σε κάθε περίπτωση είναι:

$$f(x) + 2\ln 2 \geq 2f\left(\frac{x+1}{2}\right), \text{ για κάθε } x > 0$$

2^{ος} τρόπος (με τη βοήθεια ακρότατου)

Υπόδειξη: αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = f(x) - 2f\left(\frac{x+1}{2}\right) + 2\ln 2, x > 0 \text{ έχει ελάχιστο το } 0.$$

iv) 1^{ος} τρόπος: (με τη βοήθεια της μονοτονίας)

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x) = \int_x^{2012} tf(t)dt - x \int_x^{2012} f(t)dt = - \int_{2012}^x tf(t)dt + x \int_{2012}^x f(t)dt, x \in (0, 2012]$$

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη γιατί οι συναρτήσεις $f(t)$, $tf(t)$ είναι συνεχείς, με

$$h'(x) = \left(- \int_{2012}^x tf(t)dt + x \int_{2012}^x f(t)dt \right)' = -xf(x) + \int_{2012}^x f(t)dt + xf(x) = \int_{2012}^x f(t)dt, x \in (0, 2012]$$

Για κάθε $x \in (0, 2012]$ είναι:

$$h''(x) = \left(\int_{2012}^x f(t)dt \right)' = f(x) > 0$$

αφού το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το $f(A) = (1, +\infty)$

Άρα η συνάρτηση h' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, 2012]$, οπότε

$$\text{για } 0 < x < 2012 \text{ ισχύει } h'(x) < h'(2012) \stackrel{h'(2012)=0}{\Leftrightarrow} h'(x) < 0$$

Έχουμε:

$$\begin{cases} h \text{ συνεχής στο } (0, 2012] \\ h'(x) < 0 \text{ στο } (0, 2012) \end{cases}$$

Άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 2012]$

Επομένως για κάθε $x \in (0, 2012)$ ισχύει:

$$h(x) > h(2012) = 0 \Rightarrow - \int_{2012}^x tf(t)dt + x \int_{2012}^x f(t)dt > 0 \Rightarrow$$

$$\int_x^{2012} tf(t)dt - x \int_x^{2012} f(t)dt > 0 \Rightarrow \int_x^{2012} tf(t)dt > x \int_x^{2012} f(t)dt$$

2^{ος} τρόπος

Για κάθε $x \in (0, 2012)$ είναι :

$$\int_x^{2012} tf(t)dt > x \int_x^{2012} f(t)dt \Leftrightarrow \int_x^{2012} tf(t)dt - x \int_x^{2012} f(t)dt > 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_x^{2012} tf(t)dt - \int_x^{2012} xf(t)dt > 0 \Leftrightarrow \int_x^{2012} (t-x)f(t)dt > 0$$

που ισχύει γιατί η συνάρτηση $(t-x)f(t)$ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[x, 2012]$,

αφού $x \in (0, 2012)$ και $(t-x)f(t) \geq 0$, για κάθε $t \in [x, 2012]$ με το ίσο να ισχύει μόνο

για $t=x$, άρα $\int_x^{2012} (t-x)f(t)dt > 0$

ΘΕΜΑ 21ο :

Έστω η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(f'(x)) + f(x) = 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$ (1)
- $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$ (2)
- $f(1) = 0$ (3)

α) i) Να βρείτε το $f'(1)$

ii) Να αποδείξετε ότι $f'(f'(x)) = x$, $x \in (0, +\infty)$

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln x$, $x \in (0, +\infty)$

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$ η ευθεία $\varepsilon: y = x + \kappa$ έχει δυο κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f

δ) Αν $\kappa < -1$ και $A(a, f(a)), B(\beta, f(\beta))$ με $a < \beta$, τα κοινά σημεία της ευθείας (ε) με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $a\beta(\ln \xi - 1) = \kappa \xi^2$

ΛΥΣΗ

α) i) Από τη σχέση (2) προκύπτει ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, άρα είναι και «1-1»

Από τη σχέση (1) για $x=1$ έχουμε:

$$f(f'(1)) + f(1) = 0 \Rightarrow f(f'(1)) = 0 \stackrel{(3)}{\Rightarrow} f'(1) = 1$$

$$f(f'(1)) = f(1) \stackrel{f: \langle 1-1 \rangle}{\Rightarrow} f'(1) = 1 \quad (4)$$

ii) Αν στη σχέση (1) θέσουμε όπου x το $f'(x)$ έχουμε:

$$f(f'(f'(x))) + f(f'(x)) = 0 \stackrel{+f(x)}{\Rightarrow}$$

$$f(f'(f'(x))) + \underbrace{f(f'(x)) + f(x)}_{=0} = f(x) \stackrel{(1)}{\Rightarrow}$$

$$f(f'(f'(x))) = f(x) \stackrel{f: \langle 1-1 \rangle}{\Rightarrow} f'(f'(x)) = x, \quad x \in (0, +\infty) \quad (5)$$

β) Η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$, άρα η συνάρτηση f' είναι

παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, οπότε και η συνάρτηση $f(f'(x))$ είναι παραγωγίσιμη, ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων. Παραγωγίζοντας και τα δυο μέλη της σχέσης (1) έχουμε:

$$f(f'(x)) + f(x) = 0 \Rightarrow (f(f'(x)) + f(x))' = (0)' \Rightarrow$$

$$f'(f'(x)) \cdot f''(x) + f'(x) = 0 \stackrel{(5)}{\Rightarrow} x f''(x) + f'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$(x f'(x))' = 0 \Rightarrow x f'(x) = c_1, \quad x \in (0, +\infty) \text{ και } c_1 \in \mathbb{R} \quad (6)$$

Από τη σχέση (6) για $x=1$ έχουμε:

$$1 \cdot f'(1) = c_1 \stackrel{(4)}{\Leftrightarrow} c_1 = 1$$

Άρα για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$x f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \stackrel{+x>0}{\Leftrightarrow} f'(x) = (\ln x)' \Leftrightarrow f(x) = \ln x + c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R} \quad (7)$$

Από τη σχέση (7) για $x=1$ έχουμε:

$$f(1) = \ln 1 + c_2 \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} c_2 = 0$$

Άρα:

$$f(x) = \ln x, \quad x \in (0, +\infty) \quad (8)$$

γ) Αρκεί να βρούμε για ποιες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $\ln x = x + \kappa$ έχει δύο λύσεις.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \ln x - x - \kappa$, $x \in (0, +\infty)$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο:

$$g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$$

Είναι:

- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0, 1)$
- $g'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (1, +\infty)$

Το πρόσημο της $g'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της g φαίνονται στον παρακάτω

πίνακα.

x	0	1	$+\infty$	
$g'(x)$		+	0	-
$g(x)$		\nearrow	$-1-\kappa$	\searrow

μέγιστο

Είναι:

$$g(1) = \ln 1 - 1 - \kappa = -1 - \kappa$$

- Η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0, 1]$
- Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1, +\infty)$
- Η συνάρτηση g παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 1$ με μέγιστη τιμή $g(1) = -1 - \kappa$

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - x - \kappa) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x - \kappa) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\frac{\ln x}{x} - 1 - \frac{\kappa}{x} \right) \right] = -\infty, \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} - 1 - \frac{\kappa}{x} \right) = 0 - 1 - 0 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

Το σύνολο τιμών της συνάρτησης g είναι:

$$g(\Delta) = g(\Delta_1) \cup g(\Delta_2)$$

- Η συνάρτηση g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0, 1]$, οπότε είναι:

$$g(\Delta_1) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x), g(1) \right] = (-\infty, -1 - \kappa]$$

- Η συνάρτηση g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1, +\infty)$, οπότε είναι:

$$g(\Delta_2) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x), g(1) \right] = (-\infty, -1 - \kappa]$$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης g είναι:

$$g(\Delta) = g(\Delta_1) \cup g(\Delta_2) = (-\infty, -1 - \kappa]$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι, η συνάρτηση g λαμβάνει κάθε τιμή του συνόλου τιμών της, εκτός από την μέγιστη, ακριβώς δύο φορές.

Άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει δύο ρίζες σε κάθε περίπτωση που η μέγιστη τιμή της είναι θετική, δηλαδή όταν $-1 - \kappa > 0$ που σημαίνει ότι $\kappa < -1$

δ) 1^{ος} τρόπος:

Αν $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$ είναι τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = x + \kappa$ με $\kappa < -1$, τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} \bullet f(\alpha) = \alpha + \kappa &\stackrel{(8)}{\Rightarrow} \ln \alpha = \alpha + \kappa \Rightarrow \frac{\ln \alpha}{\alpha} = 1 + \frac{\kappa}{\alpha} \\ \bullet f(\beta) = \beta + \kappa &\stackrel{(8)}{\Rightarrow} \ln \beta = \beta + \kappa \Rightarrow \frac{\ln \beta}{\beta} = 1 + \frac{\kappa}{\beta} \end{aligned}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις προηγούμενες σχέσεις έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\ln \alpha}{\alpha} - \frac{\ln \beta}{\beta} &= \left(1 + \frac{\kappa}{\alpha}\right) - \left(1 + \frac{\kappa}{\beta}\right) \Rightarrow \\ \frac{\ln \alpha}{\alpha} - \frac{\ln \beta}{\beta} &= \frac{\kappa}{\alpha} - \frac{\kappa}{\beta} \Rightarrow \frac{\ln \alpha}{\alpha} - \frac{\ln \beta}{\beta} = \kappa \frac{\beta - \alpha}{\alpha\beta} \Rightarrow \\ \frac{\ln \beta}{\beta} - \frac{\ln \alpha}{\alpha} &= -\kappa \frac{\beta - \alpha}{\alpha\beta} \Rightarrow \frac{\frac{\ln \beta}{\beta} - \frac{\ln \alpha}{\alpha}}{\beta - \alpha} = -\frac{\kappa}{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (9)$$

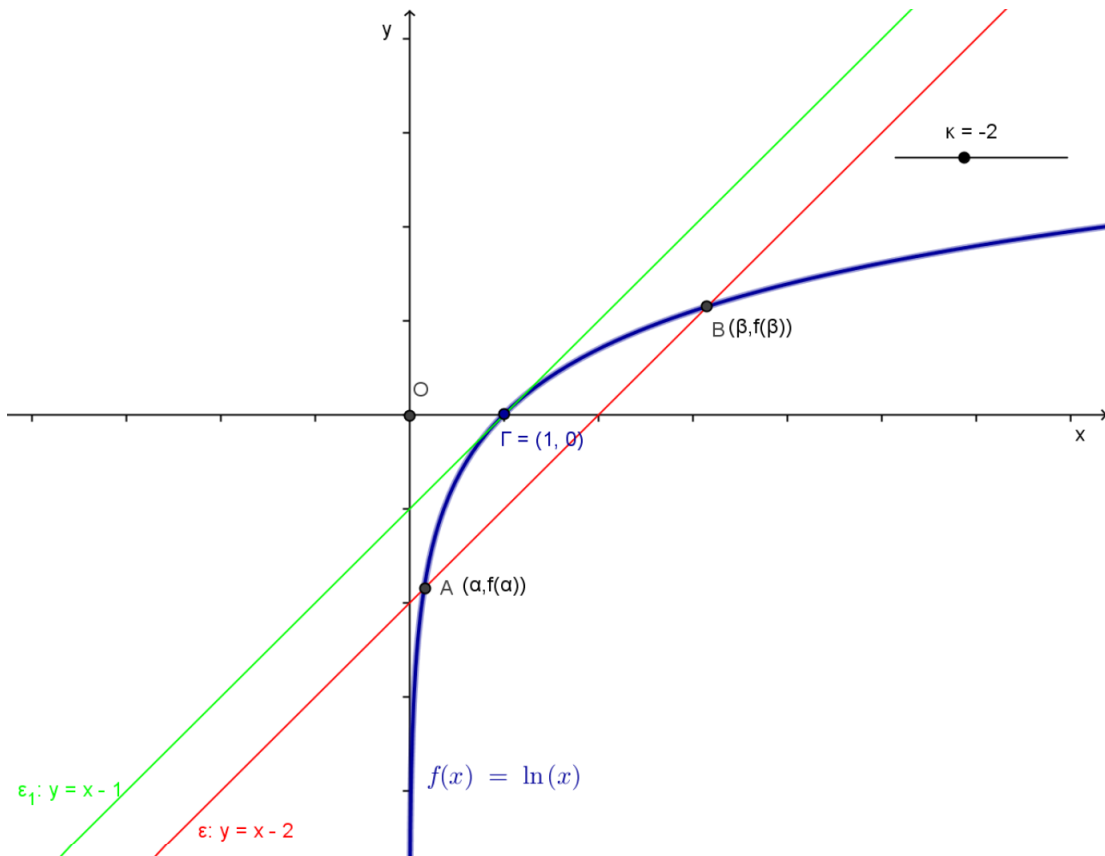
Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x \in [\alpha, \beta]$

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$, ως πηλίκο παραγωγισίμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$$h'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \quad (10)$$

Η συνάρτηση h ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει

$$\begin{aligned} h'(\xi) &= \frac{h(\beta) - h(\alpha)}{\beta - \alpha} \stackrel{(10)}{\Rightarrow} \frac{1 - \ln \xi}{\xi^2} = \frac{\frac{\ln \beta}{\beta} - \frac{\ln \alpha}{\alpha}}{\beta - \alpha} \stackrel{(9)}{\Rightarrow} \\ &= \frac{1 - \ln \xi}{\xi^2} = -\frac{\kappa}{\alpha\beta} \Rightarrow \alpha\beta(1 - \ln \xi) = -\kappa \xi^2 \Rightarrow \alpha\beta(\ln \xi - 1) = \kappa \xi^2 \end{aligned}$$



2^{ος} τρόπος:

Αν $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$ είναι τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = x + \kappa$ με $\kappa < -1$, τότε έχουμε:

- $f(\alpha) = \alpha + \kappa \Rightarrow \ln \alpha = \alpha + \kappa$, με $0 < \alpha < 1$
- $f(\beta) = \beta + \kappa \Rightarrow \ln \beta = \beta + \kappa$, με $\beta > 1$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = \alpha\beta(\ln x - 1) - \kappa x^2$, $x \in [\alpha, \beta]$

♦ Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

♦ $\varphi(\alpha) = \alpha\beta(\ln \alpha - 1) - \kappa \alpha^2 \stackrel{\ln \alpha = \alpha + \kappa}{=} \alpha\beta(\alpha + \kappa - 1) - \kappa \alpha^2 =$
 $= \alpha(\alpha\beta + \beta\kappa - \beta - \kappa\alpha) = \alpha \left[\underbrace{\beta(\alpha - 1)}_{< 0} + \underbrace{\kappa(\beta - \alpha)}_{< 0} \right] < 0$

ο $\varphi(\beta) = \alpha\beta(\ln \beta - 1) - \kappa \beta^2 \stackrel{\ln \beta = \beta + \kappa}{=} \alpha\beta(\beta + \kappa - 1) - \kappa \beta^2 =$
 $= \beta(\alpha\beta + \alpha\kappa - \alpha - \kappa\beta) = \beta \left[\underbrace{\alpha(\beta - 1)}_{> 0} + \underbrace{\kappa(\alpha - \beta)}_{> 0} \right] > 0$

οπότε $\varphi(\alpha)\varphi(\beta) < 0$

Η συνάρτηση φ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$\varphi(\xi) = 0 \Leftrightarrow \alpha\beta(\ln\xi - 1) - \kappa\xi^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha\beta(\ln\xi - 1) = \kappa\xi^2$$

ΘΕΜΑ 22ο :

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με:

- $f(x) = xe^x + \alpha$
- $g(x) = -\frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x + \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Αν οι γραφικές παραστάσεις C_f, C_g των συναρτήσεων f, g αντίστοιχα δέχονται, σε κοινό τους σημείο, κοινή εφαπτομένη (ε), που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha = 0, \quad \beta = -\frac{3}{2} \quad \text{και η κοινή εφαπτομένη } (\varepsilon) \text{ είναι η ευθεία με εξίσωση } y = x$$

β) Να βρείτε το εμβαδόν E_1 του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της

συνάρτησης f , την ευθεία (ε) και την ευθεία με εξίσωση $x = t, t > 0$

γ) Να βρείτε το εμβαδόν E_2 του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης g , την ευθεία (ε) και την ευθεία με εξίσωση $x = t, t > 0$

δ) Να αποδείξετε ότι $E_1(t) < E_2(t) + te^t$ για κάθε $t > 0$

ΛΥΣΗ

α) Οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα δέχονται κοινή εφαπτομένη (ε), σε κοινό τους σημείο $M(x_0, y_0)$, αν και μόνο αν

$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) = y_0 \\ f'(x_0) = g'(x_0) = \lambda \end{cases}, \quad (\text{όπου } \lambda \text{ ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας } (\varepsilon))$$

Η εφαπτομένη (ε) διέρχεται από την αρχή των αξόνων, άρα έχει εξίσωση της μορφής $y = \lambda x$
Άρα:

$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) = \lambda x_0 & (1) \\ f'(x_0) = g'(x_0) = \lambda & (2) \end{cases}$$

Οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} , με:

- $f'(x) = (xe^x + \alpha)' = e^x + xe^x = (x+1)e^x, \quad x \in \mathbb{R}$
- $g'(x) = \left(-\frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x + \beta\right)' = -e^{2x} + 2e^x = e^x(2 - e^x), \quad x \in \mathbb{R}$

Για $x = x_0$ από τη σχέση (2) έχουμε:

$$f'(x_0) = g'(x_0) \Leftrightarrow (x_0+1)e^{x_0} = e^{x_0}(2 - e^{x_0}) \Leftrightarrow x_0+1 = 2 - e^{x_0} \Leftrightarrow e^{x_0} + x_0 - 1 = 0 \quad (3)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x) = e^x + x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$h'(x) = (e^x + x - 1)' = e^x + 1 > 0$$

Άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} , οπότε είναι και «1-1»

Η εξίσωση (3) ισοδύναμα γράφεται:

$$h(x_0) = h(0) \Leftrightarrow x_0 = 0$$

Για $x_0 = 0$ από τη σχέση (1) έχουμε:

- $f(0) = \lambda \cdot 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$
- $g(0) = \lambda \cdot 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}e^0 + 2e^0 + \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = -2 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \beta = -\frac{3}{2}$

Για $x_0 = 0$ από τη σχέση (2) έχουμε:

- $f'(0) = \lambda \Leftrightarrow \lambda = (0+1)e^0 \Leftrightarrow \lambda = 1$

Άρα η εξίσωση της κοινής εφαπτομένης (ε) είναι: $y = x$

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

- $f'(x) = (x+1)e^x$
- $f''(x) = ((x+1)e^x)' = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$

Είναι:

$$f''(x) = (x+2)e^x > 0 \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty) \subseteq (-2, +\infty)$$

Άρα η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $[0, +\infty)$, οπότε η γραφική της παράσταση C_f βρίσκεται από την εφαπτομένη (ε): $y = x$ και «πάνω», δηλαδή ισχύει:

$$f(x) \geq x \Leftrightarrow f(x) - x \geq 0 \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty)$$

με το «ίσον» να ισχύει μόνο για $x = 0$ (τετμημένη του σημείου επαφής)

Επομένως το εμβαδόν E_1 του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f , την ευθεία (ε) και την ευθεία με εξίσωση $x = t$, $t > 0$, είναι:

$$\begin{aligned} E_1(t) &= \int_0^t (f(x) - x) dx = \int_0^t (xe^x - x) dx = \int_0^t xe^x dx - \int_0^t x dx = \int_0^t x(e^x)' dx - \int_0^t x dx = \\ &= [xe^x]_0^t - \int_0^t (x)' e^x dx - \frac{1}{2} [x^2]_0^t = te^t - \int_0^t e^x dx - \frac{1}{2} t^2 = \\ &= te^t - e^t + 1 - \frac{1}{2} t^2 = te^t - e^t - \frac{1}{2} t^2 + 1, \quad t > 0 \end{aligned}$$

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

- $g'(x) = e^x(2 - e^x) = 2e^x - e^{2x}$
- $g''(x) = (-e^{2x} + 2e^x)' = -2e^{2x} + 2e^x = 2e^x(1 - e^x)$

Είναι:

$$g''(x) = 2e^x(1 - e^x) < 0 \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Επίσης η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, άρα είναι κοίλη στο διάστημα $[0, +\infty)$, οπότε η γραφική της παράσταση C_g βρίσκεται από την εφαπτομένη (ε): $y = x$ και «κάτω», δηλαδή ισχύει:

$$g(x) \leq x \Leftrightarrow g(x) - x \leq 0 \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty)$$

Επειδή η συνάρτηση Φ είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση Φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$

Επομένως για κάθε $t > 0$ είναι:

$$t > 0 \stackrel{\Phi \downarrow}{\Rightarrow} \Phi(t) < \Phi(0)$$

Όμως

$$\Phi(0) = e^0 - \frac{1}{4}e^0 - \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = 0$$

Άρα:

$$\Phi(t) < 0, \quad t > 0$$

Δηλαδή:

$$E_1(t) < E_2(t) + t \cdot e^t, \quad t > 0$$

ΘΕΜΑ 23ο :

α) Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$, $a > 0$ με $f(a-x) + f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [0, a]$

Να αποδείξετε ότι
$$\int_0^a \frac{f(x)}{f(a-x) + f(x)} dx = \int_0^a \frac{f(a-x)}{f(a-x) + f(x)} dx \quad (1)$$

β) Αν $f(x) = \sin x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, τότε:

i) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\eta \mu x + \sin x} dx$$

ii) Αν επιπλέον g είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και

ισχύει η σχέση $(f(x)g(x))' = f'(x)g'(x)$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (1), τότε να αποδείξετε

ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $2g'(\xi) = g(\xi)$

ΛΥΣΗ

α) Στο ολοκλήρωμα του πρώτου μέλους θέτουμε $x = a - u$, οπότε $a - x = u$ και $dx = -du$

Για $x = 0$ είναι $u = a$ και για $x = a$ είναι $u = 0$

Έχουμε:

$$\int_0^a \frac{f(x)}{f(a-x) + f(x)} dx = \int_a^0 \frac{f(a-u)}{f(u) + f(a-u)} (-du) = - \int_a^0 \frac{f(a-u)}{f(a-u) + f(u)} du =$$

$$= \int_0^{\alpha} \frac{f(\alpha-u)}{f(\alpha-u)+f(u)} du = \int_0^{\alpha} \frac{f(\alpha-x)}{f(\alpha-x)+f(x)} dx$$

β) i) Η συνάρτηση $f(x) = \sin x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι συνεχής και ικανοποιεί τη σχέση

$$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + \sin x = \cos x + \sin x \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Επομένως, για $f(x) = \sin x$ και $\alpha = \frac{\pi}{2}$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + \sin x} dx \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx$$

Θέτουμε:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx \quad \text{και} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx$$

Είναι:

• $I = J$ και

• $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \cos x}{\cos x + \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2}$

Άρα $2I = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow I = \frac{\pi}{4}$, δηλαδή

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx = \frac{\pi}{4}$$

ii) Οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, άρα και η συνάρτηση

$f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, με

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = f'(x)g'(x), \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad (3)$$

Για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και $f'(x) = -\eta\mu x$, οπότε η σχέση (3) γράφεται:

$$\begin{aligned} (-\eta\mu x) \cdot g(x) + \sigma\upsilon\nu x \cdot g'(x) &= (-\eta\mu x) \cdot g'(x) \Leftrightarrow \\ (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) \cdot g'(x) &= \eta\mu x \cdot g(x) \Leftrightarrow \\ \frac{g'(x)}{g(x)} &= \frac{\eta\mu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{aligned} \quad (4)$$

Είναι:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{g'(x)}{g(x)} dx \stackrel{(4)}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} dx = \frac{\pi}{4}$$

Επομένως έχουμε:

$$\left[\ln g(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \ln g\left(\frac{\pi}{2}\right) - \ln g(0) = \frac{\pi}{4} \quad (5)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x) = \ln g(x), \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, με $h'(x) = (\ln g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)}$

Επομένως η συνάρτηση h ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ, οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε

$$\begin{aligned} h'(\xi) &= \frac{h\left(\frac{\pi}{2}\right) - h(0)}{\frac{\pi}{2} - 0} \Leftrightarrow \frac{g'(\xi)}{g(\xi)} = \frac{\ln g\left(\frac{\pi}{2}\right) - \ln g(0)}{\frac{\pi}{2}} \stackrel{(5)}{\Leftrightarrow} \\ \frac{g'(\xi)}{g(\xi)} &= \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \frac{g'(\xi)}{g(\xi)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2g'(\xi) = g(\xi) \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 24ο :

Έστω η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $xf'(x) + x^2f''(x) = 2$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$ (1)
- $f(1) = 0$ (2)

$$\bullet f'(1)=2 \quad (3)$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ln^2 x+2\ln x$, $x \in (0, +\infty)$

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=1$ και $x=e$

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu\alpha + \int_1^{\alpha} f(x)dx}{\alpha \ln^2 \alpha + 1}$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} x f'(x) + x^2 f''(x) &= 2 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} f'(x) + x f''(x) = \frac{2}{x} \Leftrightarrow \\ (x f'(x))' &= (2 \ln x)' \Rightarrow x f'(x) = 2 \ln x + c_1, c_1 \in \mathbb{R} \quad (4) \end{aligned}$$

Από τη σχέση (4) για $x=1$ έχουμε:

$$1 \cdot f'(1) = 2 \ln 1 + c_1 \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} c_1 = 2$$

Άρα για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} x f'(x) &= 2 \ln x + 2 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} f'(x) = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} + 2 \frac{1}{x} \Leftrightarrow \\ f'(x) &= 2 \ln x (\ln x)' + 2 (\ln x)' \Leftrightarrow f'(x) = (\ln^2 x + 2 \ln x)' \Leftrightarrow \\ f(x) &= \ln^2 x + 2 \ln x + c_2, c_2 \in \mathbb{R} \quad (5) \end{aligned}$$

Από τη σχέση (5) για $x=1$ έχουμε:

$$f(1) = \ln^2 1 + 2 \ln 1 + c_2 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} c_2 = 0$$

Άρα:

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x, \quad x \in (0, +\infty)$$

β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[1, e]$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [1, e]$, επομένως το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=1$ και $x=e$, είναι:

$$\begin{aligned} E &= \int_1^e f(x) dx = \int_1^e (\ln^2 x + 2 \ln x) dx = \int_1^e (x)' \ln^2 x dx + 2 \int_1^e \ln x dx = \\ &= [x \ln^2 x]_1^e - 2 \int_1^e x \ln x \cdot \frac{1}{x} dx + 2 \int_1^e \ln x dx = e \ln^2 e - 2 \int_1^e \ln x dx + 2 \int_1^e \ln x dx = e \end{aligned}$$

γ) Με διαδικασία ανάλογη αυτής που χρησιμοποιήσαμε στον υπολογισμό του εμβαδού, βρίσκουμε ότι:

$$\int_1^{\alpha} f(x) dx = [x \ln^2 x]_1^{\alpha} - 2 \int_1^{\alpha} \ln x dx + 2 \int_1^{\alpha} \ln x dx = \alpha \ln^2 \alpha \quad (6)$$

οπότε για κάθε $a \in (1, +\infty)$ έχουμε:

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu\alpha + \int_1^{\alpha} f(x) dx}{\alpha \ln^2 \alpha + 1} \stackrel{(6)}{=} \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu\alpha + \alpha \ln^2 \alpha}{\alpha \ln^2 \alpha + 1} =$$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{\alpha \ln^2 \alpha \left(1 + \frac{\eta\mu\alpha}{\alpha \ln^2 \alpha}\right)}{\alpha \ln^2 \alpha \left(1 + \frac{1}{\alpha \ln^2 \alpha}\right)} = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{\eta\mu\alpha}{\alpha \ln^2 \alpha}}{1 + \frac{1}{\alpha \ln^2 \alpha}} = 1, \text{ γιατί}$$

- $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} (\alpha \ln^2 \alpha) = +\infty$, οπότε $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha \ln^2 \alpha} = 0$

- $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha \ln^2 \alpha}\right) = 1$

- $\left| \frac{\eta\mu\alpha}{\alpha \ln^2 \alpha} \right| \leq \frac{1}{\alpha \ln^2 \alpha} \Rightarrow -\frac{1}{\alpha \ln^2 \alpha} \leq \frac{\eta\mu\alpha}{\alpha \ln^2 \alpha} \leq \frac{1}{\alpha \ln^2 \alpha}$

Είναι:

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\alpha \ln^2 \alpha}\right) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha \ln^2 \alpha} = 0$$

οπότε από το Κριτήριο Παρεμβολής, συμπεραίνουμε ότι:

- $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu\alpha}{\alpha \ln^2 \alpha} = 0$, οπότε $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\eta\mu\alpha}{\alpha \ln^2 \alpha}\right) = 1$

ΘΕΜΑ 25ο :

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \int_0^{x^3} e^{t^2} dt$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}

β) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f , στο σημείο της $O(0, 0)$ είναι ο άξονας $x'x$

γ) $f(x) \geq \frac{1}{3}x^9$ για κάθε $x \geq 0$

δ) $6 \int_0^1 x^2 f(x) dx - 2 \int_0^1 e^{x^2} dx = 1 - e$

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση e^{t^2} είναι συνεχής στο \mathbb{R} , άρα η συνάρτηση $h(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , οπότε και η συνάρτηση $f(x) = h(x^3)$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , ως σύνθεση με παραγωγισίμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$$f'(x) = (h(x^3))' = h'(x^3)(x^3)' = e^{x^6} \cdot 3x^2 = 3x^2 e^{x^6}, \quad x \in \mathbb{R}$$

β) Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f , στο σημείο της $O(0, 0)$ είναι:

$$(\varepsilon) : y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$

Είναι:

$$f(0) = \int_0^0 e^{t^2} dt = 0 \quad \text{και} \quad f'(0) = 0 \cdot e^0 = 0$$

Άρα:

$$(\varepsilon) : y - 0 = 0 \cdot (x - 0) \Leftrightarrow y = 0$$

Δηλαδή, ο άξονας x' εφάπτεται της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f , στο σημείο της $O(0, 0)$

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^9, \quad x \in \mathbb{R}$$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη, ως διαφορά παραγωγίσιμων με παράγωγο:

$$g'(x) = f'(x) - 3x^8 = 3x^2 e^{x^6} - 3x^8 = 3x^2 (e^{x^6} - x^6), \quad x \in \mathbb{R}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$e^x \geq x + 1 > x \quad (\text{γνωστή άσκηση} - \text{θέλει απόδειξη})$$

οπότε:

$$e^{x^6} > x^6, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα:

$$g'(x) = 3x^2 (e^{x^6} - x^6) > 0, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}^*$$

Είναι:

$$\begin{cases} g \text{ συνεχής στο } \mathbb{R} \\ g'(x) > 0 \text{ στο } \mathbb{R}^* \end{cases}, \quad \text{οπότε η συνάρτηση } g \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } \mathbb{R}$$

Επομένως για κάθε $x \geq 0$ έχουμε:

$$x \geq 0 \Rightarrow g(x) \geq g(0) \Rightarrow f(x) - \frac{1}{3}x^9 \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq \frac{1}{3}x^9$$

δ) Είναι:

$$6 \int_0^1 x^2 f(x) dx = 2 \int_0^1 3x^2 f(x) dx = 2 \int_0^1 (x^3)' f(x) dx =$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \left(\left[x^3 f(x) \right]_0^1 - \int_0^1 x^3 f'(x) dx \right) = 2f(1) - 2 \int_0^1 x^3 f'(x) dx = \\
 &= 2 \int_0^1 e^{x^2} dx - \int_0^1 6x^5 e^{x^6} dx = 2 \int_0^1 e^{x^2} dx - \int_0^1 e^{x^6} (x^6)' dx = \\
 &= 2 \int_0^1 e^{x^2} dx - \int_0^1 (e^{x^6})' dx = 2 \int_0^1 e^{x^2} dx - \left[e^{x^6} \right]_0^1 = 2 \int_0^1 e^{x^2} dx - e + 1
 \end{aligned}$$

Δείξαμε ότι:

$$6 \int_0^1 x^2 f(x) dx = 2 \int_0^1 e^{x^2} dx - e + 1$$

Άρα:

$$6 \int_0^1 x^2 f(x) dx - 2 \int_0^1 e^{x^2} dx = 1 - e$$

ΘΕΜΑ 26ο :

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $2 \sin x + \int_0^x t f(t) dt = \int_0^x \left(\int_0^u f(t) dt \right) du - x \sin x + 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (1)
- $f(0) = 0$ (2)
- $f'(0) = \alpha$ (3)

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 1 - \sin x$, $x \in \mathbb{R}$

γ) Να βρείτε:

- i) Την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $\frac{2\pi}{3}$
- ii) Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f , από την εφαπτομένη (ε) της C_f και τις ευθείες με εξισώσεις $x = \frac{2\pi}{3}$ και $x = \frac{4\pi}{3}$

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο \mathbb{R} , άρα η συνάρτηση $g(u) = \int_0^u f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη

στο \mathbb{R} , άρα και συνεχής στο \mathbb{R} , οπότε η $\int_0^x g(u)du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)dt \right) du$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} .

Η συνάρτηση $tf(t)$ είναι συνεχής στο \mathbb{R} , άρα και η συνάρτηση $\int_0^x tf(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} . Επίσης οι συναρτήσεις $2\sigma\upsilon\nu x$ και $-x\eta\mu x + 2$ είναι παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} .

Παραγωγίζοντας και τα δυο μέλη της σχέσης (1) έχουμε:

$$-2\eta\mu x + xf(x) = \int_0^x f(t)dt - \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$$

$$xf(x) = \int_0^x f(t)dt + \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x, \quad x \in \mathbb{R} \quad (4)$$

Από τη σχέση (4) για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ έχουμε:

$$f(x) = \frac{\int_0^x f(t)dt + \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x}{x} \quad (5)$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$, γιατί ο τύπος της f προκύπτει από πράξεις μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων σε καθένα από αυτά τα διαστήματα.

Από τη σχέση (3) έχουμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 0$, οπότε είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} .

Προσδιορισμός του πραγματικού αριθμού α :

Για $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ έχουμε:

$$\alpha = f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \stackrel{f(0)=0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \quad (6)$$

Είναι:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} &\stackrel{(6)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t)dt + \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x}{x^2} \stackrel{0}{=} \frac{0}{0} \\ &\stackrel{\text{D.L.H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x}{2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + x\eta\mu x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{x} + \eta\mu x \right) = \frac{1}{2} \alpha \end{aligned}$$

οπότε, λόγω της σχέσης (6) είναι:

$$\alpha = \frac{1}{2} \alpha \Leftrightarrow 2\alpha = \alpha \Leftrightarrow \alpha = 0$$

β) Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της σχέσης (4) έχουμε:

$$(xf(x))' = \left(\int_0^x f(t) dt + \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x \right)' \Rightarrow$$

$$f(x) + xf'(x) = f(x) + \sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu x + x\eta\mu x \Rightarrow$$

$$xf'(x) = x\eta\mu x, x \in \mathbb{R}$$

Σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ έχουμε:

$$f'(x) = \eta\mu x = (-\sigma\upsilon\nu x)'$$

οπότε:

$$f(x) = \begin{cases} -\sigma\upsilon\nu x + c_1, & x \in (-\infty, 0) \\ 0, & x = 0 \\ -\sigma\upsilon\nu x + c_2, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο \mathbb{R} , άρα είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$, οπότε έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (-\sigma\upsilon\nu x + c_1) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\sigma\upsilon\nu x + c_2) = 0 \Rightarrow$$

$$-\sigma\upsilon\nu 0 + c_1 = -\sigma\upsilon\nu 0 + c_2 = 0 \Rightarrow$$

$$-1 + c_1 = -1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 1$$

Επομένως

$$f(x) = \begin{cases} -\sigma\upsilon\nu x + 1, & x \in (-\infty, 0) \\ 0, & x = 0 \\ -\sigma\upsilon\nu x + 1, & x \in (0, +\infty) \end{cases} \Rightarrow f(x) = 1 - \sigma\upsilon\nu x, x \in \mathbb{R}$$

γ) i) Είναι:

$$\bullet f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1 - \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{3} = 1 - \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 1 - \left(-\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3}\right) = 1 + \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\bullet f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \eta\mu \frac{2\pi}{3} = \eta\mu\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \eta\mu \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της με τετμημένη $\frac{2\pi}{3}$ είναι:

$$\varepsilon: y - \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{2\pi}{3} \right) \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{9 - 2\sqrt{3}\pi}{6}$$

ii) Στο διάστημα $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$ η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, με

$$f'(x) = \eta\mu x \quad \text{και} \quad f''(x) = \sigma\upsilon\nu x < 0$$

οπότε η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα αυτό.

Επομένως η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο της με τετμημένη $\frac{2\pi}{3}$, βρίσκεται από την C_f και «πάνω»

Επομένως το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f , από την εφαπτομένη (ε) της C_f και τις ευθείες με εξισώσεις $x = \frac{2\pi}{3}$ και

$x = \frac{4\pi}{3}$ είναι:

$$\begin{aligned} E &= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{9-2\sqrt{3}\pi}{6} - f(x) \right) dx = \\ &= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \left(\sigma\upsilon\nu x + \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{9-2\sqrt{3}\pi}{6} - 1 \right) dx = \\ &= [\eta\mu x]_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{16\pi^2}{9} - \frac{4\pi^2}{9} \right) + \frac{3-2\sqrt{3}\pi}{6} \cdot \frac{2\pi}{3} = \\ &= \frac{\sqrt{3}\pi^2 + 3\pi - 9\sqrt{3}}{9} \end{aligned}$$