

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ 2012

ΘΕΜΑ 1ο :

Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ με $\operatorname{Re}(z_1) = -2$ και $\operatorname{Re}(z_2) = 2$

Αν $f(x) = (x - z_1)(x - \bar{z}_1)(x - z_2)(x - \bar{z}_2)$ και $f(i) = 64 - 8i$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $f(-i) = 64 + 8i$

β) $(1 + z_1^2)(1 + \bar{z}_1^2)(1 + z_2^2)(1 + \bar{z}_2^2) = 4160$

γ) $|z_1| = 3$ και $|z_2| = \sqrt{7}$

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\begin{aligned} \bullet f(i) &= (i - z_1)(i - \bar{z}_1)(i - z_2)(i - \bar{z}_2) \\ \bullet f(-i) &= (-i - z_1)(-i - \bar{z}_1)(-i - z_2)(-i - \bar{z}_2) = \\ &= (\bar{i} - z_1)(\bar{i} - \bar{z}_1)(\bar{i} - z_2)(\bar{i} - \bar{z}_2) = \\ &= (\overline{i - z_1})(\overline{i - \bar{z}_1})(\overline{i - z_2})(\overline{i - \bar{z}_2}) = \\ &= (\overline{i - z_1})(\overline{i - \bar{z}_1})(\overline{i - z_2})(\overline{i - \bar{z}_2}) = \\ &= (\overline{i - z_1})(\overline{i - \bar{z}_1})(\overline{i - z_2})(\overline{i - \bar{z}_2}) = \\ &= (\overline{i - z_1})(\overline{i - \bar{z}_1})(\overline{i - z_2})(\overline{i - \bar{z}_2}) = \\ &= \overline{f(i)} = \overline{64 - 8i} = 64 + 8i \end{aligned}$$

β) Είναι:

$$\begin{aligned} &(1 + z_1^2)(1 + \bar{z}_1^2)(1 + z_2^2)(1 + \bar{z}_2^2) = \\ &= (z_1^2 - i^2)(\bar{z}_1^2 - i^2)(z_2^2 - i^2)(\bar{z}_2^2 - i^2) = \\ &= (z_1 - i)(z_1 + i)(\bar{z}_1 - i)(\bar{z}_1 + i)(z_2 - i)(z_2 + i)(\bar{z}_2 - i)(\bar{z}_2 + i) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= [(z_1 - i)(\overline{z_1 - i})(z_2 - i)(\overline{z_2 - i})][(z_1 + i)(\overline{z_1 + i})(z_2 + i)(\overline{z_2 + i})] = \\
 &= [(i - z_1)(i - \overline{z_1})(i - z_2)(i - \overline{z_2})][(-i - z_1)(-i - \overline{z_1})(-i - z_2)(-i - \overline{z_2})] = \\
 &= f(i)f(-i) = (64 - 8i)(64 + 8i) = 64^2 + 8^2 = 4096 + 64 = 4160
 \end{aligned}$$

γ) Είναι:

$$z_1 + \overline{z_1} = 2 \operatorname{Re}(z_1) = 2 \cdot (-2) = -4 \quad (1)$$

$$z_2 + \overline{z_2} = 2 \operatorname{Re}(z_2) = 2 \cdot 2 = 4 \quad (2)$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad f(i) &= (i - z_1)(i - \overline{z_1})(i - z_2)(i - \overline{z_2}) = \\
 &= [(i - z_1)(i - \overline{z_1})][(i - z_2)(i - \overline{z_2})] = \\
 &= [-1 - i(z_1 + \overline{z_1}) + |z_1|^2][-1 - i(z_2 + \overline{z_2}) + |z_2|^2] \stackrel{(1),(2)}{=} \\
 &= [|z_1|^2 - 1 + 4i][|z_2|^2 - 1 - 4i] = \\
 &= [|z_1|^2 - 1 + 4i][|z_2|^2 - 1 - 4i] = \\
 &= [(|z_1|^2 - 1)(|z_2|^2 - 1) + 16] + [4(|z_2|^2 - 1) - 4(|z_1|^2 - 1)]i = \\
 &= [(|z_1|^2 - 1)(|z_2|^2 - 1) + 16] + [4|z_2|^2 - 4|z_1|^2]i
 \end{aligned}$$

Όμως:

$$\bullet \quad f(i) = 64 - 8i$$

Άρα έχουμε:

$$\begin{cases} (|z_1|^2 - 1)(|z_2|^2 - 1) + 16 = 64 \\ 4|z_2|^2 - 4|z_1|^2 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (|z_1|^2 - 1)(|z_2|^2 - 1) = 48 \\ |z_2|^2 - |z_1|^2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (|z_2|^2 + 1)(|z_2|^2 - 1) = 48 \\ |z_1|^2 = |z_2|^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_2|^4 - 1 = 48 \\ |z_1|^2 = |z_2|^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} |z_2|^4 = 49 \\ |z_1|^2 = |z_2|^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_2| = \sqrt{7} \\ |z_1|^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_2| = \sqrt{7} \\ |z_1| = 3 \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 2ο :

Δίνεται η παράσταση $f(z) = \frac{(\sqrt{3} + i)z}{|z + 10i| - |z - 10i|}$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το ευρύτερο υποσύνολο του \mathbb{C} στο οποίο ορίζεται η παράσταση $f(z)$ είναι το $\mathbb{C} - \mathbb{R}$

β) $||z + 10i| - |z - 10i|| \leq 2|z|$

γ) $|f(z)| \geq 1$

δ) Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z , για τους οποίους ισχύει $|f(z)| = \frac{1}{6}|z|$, είναι υπερβολή, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

ΛΥΣΗ

α) Έστω $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ και $M(x, y)$ η εικόνα του στο επίπεδο.

Για να ορίζεται η παράσταση f αρκεί $|z + 10i| - |z - 10i| \neq 0$

Εξετάζουμε λοιπόν για ποιους μιγαδικούς αριθμούς z ισχύει $|z + 10i| - |z - 10i| = 0$

Είναι:

$$|z + 10i| - |z - 10i| = 0 \Leftrightarrow |z + 10i| = |z - 10i| \Leftrightarrow$$

$$|x + (y + 10)i| = |x + (y - 10)i| \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x^2 + (y + 10)^2} = \sqrt{x^2 + (y - 10)^2} \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 + 20y + 100 = x^2 + y^2 - 20y + 100 \Leftrightarrow$$

$$20y = -20y \Leftrightarrow 40y = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

Άρα, για να ορίζεται η παράσταση f αρκεί $y \neq 0$, δηλαδή $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$

β) Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \text{ για κάθε } z_1, z_2 \in \mathbb{C},$$

οπότε για $z_1 = z + 10i$ και $z_2 = z - 10i$ έχουμε:

$$||z + 10i| - |z - 10i|| \leq |(z + 10i) + (z - 10i)| = |2z| = 2|z|$$

γ) Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ είναι:

$$||z + 10i| - |z - 10i|| \leq 2|z|$$

οπότε για κάθε $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ είναι:

$$\frac{1}{||z + 10i| - |z - 10i||} \geq \frac{1}{2|z|} \quad (1)$$

Έχουμε λοιπόν:

$$|f(z)| = \left| \frac{(\sqrt{3} + i)z}{|z + 10i| - |z - 10i|} \right| = \frac{|(\sqrt{3} + i)z|}{||z + 10i| - |z - 10i||} = \frac{|\sqrt{3} + i| \cdot |z|}{||z + 10i| - |z - 10i||} =$$

$$= \frac{2|z|}{\left| |z+10i| - |z-10i| \right|} = 2|z| \cdot \frac{1}{\left| |z+10i| - |z-10i| \right|} \stackrel{(1)}{\geq} 2|z| \cdot \frac{1}{2|z|} = 1$$

δ) Είναι:

$$|f(z)| = \frac{1}{6}|z| \Leftrightarrow \left| \frac{(\sqrt{3}+i)z}{|z+10i| - |z-10i|} \right| = \frac{1}{6}|z| \Leftrightarrow \frac{|\sqrt{3}+i| \cdot |z|}{\left| |z+10i| - |z-10i| \right|} = \frac{1}{6}|z| \Leftrightarrow$$

$$\frac{2|z|}{\left| |z+10i| - |z-10i| \right|} = \frac{1}{6}|z| \Leftrightarrow |z| \cdot \left| |z+10i| - |z-10i| \right| = 12|z| \Leftrightarrow \left| |z+10i| - |z-10i| \right| = 12$$

Είναι:

$$\left| |z+10i| - |z-10i| \right| = 12 \Leftrightarrow \left| |z-(0-10i)| - |z-(0+10i)| \right| = 12 \Leftrightarrow |(ME)' - (ME)| = 12,$$

όπου M η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z , $E'(0, -10)$ και $E(0, 10)$

Παρατηρούμε ότι η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων της εικόνας M του μιγαδικού αριθμού z από τα σταθερά σημεία E' , E είναι $2a=12$ σταθερή και μικρότερη του $(E'E) = 20$.

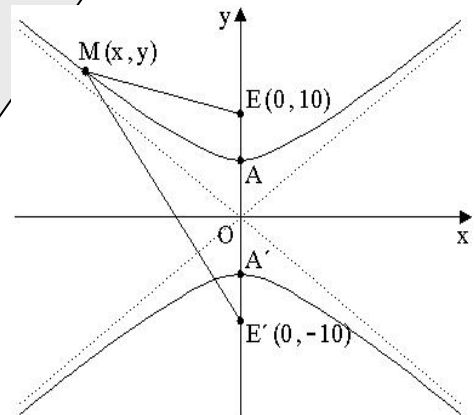
Επομένως, ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι η υπερβολή με εστίες τα σημεία $E'(0, -10)$ και $E(0, 10)$, άρα $\gamma=10$

Επιπλέον είναι $2a=12 \Leftrightarrow a=6$, οπότε

$$\beta^2 = \gamma^2 - a^2 \Leftrightarrow \beta^2 = 100 - 36 \Leftrightarrow \beta^2 = 64 \Leftrightarrow \beta = 8$$

και η εξίσωση της υπερβολής είναι:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{64} = 1$$



ΘΕΜΑ 36 :

Δίνονται τρεις μιγαδικοί αριθμοί z, w, u με $|z|=3$, $|w|=4$, $|u|=5$ και $z+w+u=0$, οι οποίοι έχουν εικόνες τα σημεία A, B, Γ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $16z^2 + 9w^2 = 0$

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο, όπου O είναι η αρχή των αξόνων.

γ) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$ με κορυφές τις εικόνες των μιγαδικών z, w, u

ΛΥΣΗ

α) Από την υπόθεση έχουμε:

$$\bullet |z|=3 \Leftrightarrow |z|^2=9 \Leftrightarrow z\bar{z}=9 \Leftrightarrow \bar{z}=\frac{9}{z} \quad (1)$$

$$\bullet |w|=4 \Leftrightarrow |w|^2=16 \Leftrightarrow w\bar{w}=16 \Leftrightarrow \bar{w}=\frac{16}{w} \quad (2)$$

$$\bullet |u|=5 \Leftrightarrow |u|^2=25 \Leftrightarrow u\bar{u}=25 \Leftrightarrow \bar{u}=\frac{25}{u} \quad (3)$$

Επίσης έχουμε:

$$u = -(z + w) \quad (4)$$

Είναι:

$$z + w + u = 0 \Leftrightarrow \bar{z} + \bar{w} + \bar{u} = 0 \quad (5)$$

Η σχέση (5) με βάση τις σχέσεις (1), (2) και (3) γράφεται:

$$\frac{9}{z} + \frac{16}{w} + \frac{25}{u} = 0 \Leftrightarrow \frac{9}{z} + \frac{16}{w} - \frac{25}{z+w} = 0 \Leftrightarrow$$

$$9w(z+w) + 16z(z+w) - 25zw = 0 \Leftrightarrow$$

$$9wz + 9w^2 + 16z^2 + 16zw - 25zw = 0 \Leftrightarrow$$

$$16z^2 + 9w^2 = 0 \quad (6)$$

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$(OA)^2 + (OB)^2 = (AB)^2 \Leftrightarrow |z|^2 + |w|^2 = |z-w|^2$$

Είναι όμως:

$$\begin{aligned} |z-w|^2 &= (z-w)(\bar{z}-\bar{w}) = z\bar{z} + w\bar{w} - (z\bar{w} + \bar{z}w) = \\ &= 16 + 9 - \left(\frac{16z}{w} + \frac{9w}{z} \right) = 25 - \frac{16z^2 + 9w^2}{zw} \stackrel{(6)}{=} 25 = (AB)^2 \end{aligned}$$

Επομένως έχουμε:

$$(AB) = |z-w| = 5$$

Είναι:

$$(OA)^2 + (OB)^2 = |z|^2 + |w|^2 = 9 + 16 = 25 = |z-w|^2 = (AB)^2$$

οπότε το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο.

γ) Αρκεί να βρούμε ακόμα τους αριθμούς $|z-u|$ και $|w-u|$, που είναι αντίστοιχα τα μήκη των πλευρών ΑΓ και ΒΓ, αφού ήδη έχουμε αποδείξει ότι $(AB) = |z-w| = 5$

Είναι:

$$\begin{aligned} |z-u|^2 &\stackrel{(4)}{=} |2z+w|^2 = (2z+w)(2\bar{z}+\bar{w}) = \\ &= 4z\bar{z} + w\bar{w} + 2(z\bar{w} + w\bar{z}) = 4|z|^2 + |w|^2 + 2(z\bar{w} + w\bar{z}) = \\ &= 36 + 16 + 2 \cdot \left(\frac{9w}{z} + \frac{16z}{w} \right) = 36 + 16 + 2 \cdot \frac{16z^2 + 9w^2}{zw} \stackrel{(6)}{=} 52 \end{aligned}$$

Επομένως έχουμε:

$$(ΑΓ) = |z-u| = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad |w - u|^2 & \stackrel{(4)}{=} |z + 2w|^2 = (z + 2w)(\bar{z} + 2\bar{w}) = \\
 & = z\bar{z} + 4w\bar{w} + 2(z\bar{w} + w\bar{z}) = |z|^2 + 4|w|^2 + 2(z\bar{w} + w\bar{z}) = \\
 & = 9 + 64 + 2 \cdot \left(\frac{9w}{z} + \frac{16z}{w} \right) = 9 + 64 + 2 \cdot \frac{16z^2 + 9w^2}{zw} = 73
 \end{aligned}$$

Επομένως έχουμε:

$$(B\Gamma) = |w - u| = \sqrt{73}$$

ΘΕΜΑ 4ο :

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, w , οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\bullet \quad \left| \frac{z}{a^2} - i \right| = \frac{1}{a} |z - i| \quad (1)$$

$$\bullet \quad w(z - i) - 2zi - 2a^2 = 0 \quad (2), \text{ όπου } a \in \mathbf{R} \text{ και } 0 < a \neq 1$$

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z

β) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών w ανήκουν σε κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

γ) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $v = \frac{2z - w}{2z + w}$ με $w \neq -2z$, είναι φανταστικός

δ) Αν z_1, z_2 είναι δυο μιγαδικοί αριθμοί με εικόνες αντίστοιχα στο επίπεδο τα σημεία A, B , οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση (1) και w είναι ένας μιγαδικός αριθμός με εικόνα στο επίπεδο το σημείο Γ , ο οποίος ικανοποιεί τη σχέση (2), τότε να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{3} \leq \frac{(\Gamma A)}{(\Gamma B)} \leq 3$$

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{z}{a^2} - i \right| = \frac{1}{a} |z - i| & \Leftrightarrow |z - a^2 i| = a |z - i| \Leftrightarrow |z - a^2 i|^2 = a^2 |z - i|^2 \Leftrightarrow \\
 (z - a^2 i)(\bar{z} - a^2 i) & = a^2 (z - i)(\bar{z} - i) \Leftrightarrow (z - a^2 i)(\bar{z} + a^2 i) = a^2 (z - i)(\bar{z} + i) \Leftrightarrow \\
 z\bar{z} + a^2 zi - a^2 \bar{z}i - a^4 i^2 & = a^2 z\bar{z} + a^2 zi - a^2 \bar{z}i - a^2 i^2 \Leftrightarrow |z|^2 - a^4 i^2 = a^2 |z|^2 - a^2 i^2 \Leftrightarrow \\
 |z|^2 - a^2 |z|^2 & = a^2 - a^4 \Leftrightarrow (1 - a^2) |z|^2 = (1 - a^2) a^2 \stackrel{0 < a \neq 1}{\Leftrightarrow} |z|^2 = a^2 \Leftrightarrow |z| = a \quad (3)
 \end{aligned}$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = a$

β) Έχουμε:

$$\begin{aligned}
 w(z - i) - 2zi - 2a^2 = 0 & \Leftrightarrow w(z - i) = 2zi + 2a^2 \stackrel{z \neq i}{\Leftrightarrow} w = \frac{2zi + 2a^2}{z - i} \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} \\
 w = \frac{2zi + 2|z|^2}{z - i} & \Leftrightarrow w = \frac{2zi + 2z\bar{z}}{z - i} \Leftrightarrow w = \frac{2z(\bar{z} + i)}{z - i} \quad (4)
 \end{aligned}$$

Είναι $z \neq i$, γιατί αν $z = i$ από τη σχέση (2) προκύπτει $a^2 = 1$ άτοπο.

Από τη σχέση (4) έχουμε:

$$|w| = \left| \frac{2z(\bar{z}+i)}{z-i} \right| \Leftrightarrow |w| = \frac{|2z(\bar{z}+i)|}{|z-i|} \Leftrightarrow |w| = \frac{2|z| \cdot |\bar{z}+i|}{|z-i|} \Leftrightarrow |w| = \frac{2|z| \cdot |\overline{z-i}|}{|z-i|} \Leftrightarrow$$

$$|w| = \frac{2|z| \cdot |z-i|}{|z-i|} \Leftrightarrow |w| = 2|z| \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} |w| = 2\alpha \quad (5)$$

Άρα οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών w ανήκουν στον κύκλο, ο οποίος έχει κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 2\alpha$

γ) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\bar{v} = -v$

Από τις σχέσεις (3) και (5) έχουμε:

- $|z|^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow z\bar{z} = \alpha^2 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{\alpha^2}{z}$
- $|w|^2 = 4\alpha^2 \Leftrightarrow w\bar{w} = 4\alpha^2 \Leftrightarrow \bar{w} = \frac{4\alpha^2}{w}$

Είναι:

$$\bar{v} = \overline{\left(\frac{2z-w}{2z+w} \right)} = \frac{\overline{2z-w}}{\overline{2z+w}} = \frac{2\bar{z} - \bar{w}}{2\bar{z} + \bar{w}} = \frac{\frac{2\alpha^2}{z} - \frac{4\alpha^2}{w}}{\frac{2\alpha^2}{z} + \frac{4\alpha^2}{w}} = \frac{2\alpha^2 \left(\frac{1}{z} - \frac{2}{w} \right)}{2\alpha^2 \left(\frac{1}{z} + \frac{2}{w} \right)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{z} - \frac{2}{w}}{\frac{1}{z} + \frac{2}{w}} = \frac{\frac{w-2z}{zw}}{\frac{w+2z}{zw}} = \frac{w-2z}{w+2z} = -\frac{2z-w}{2z+w} = -v$$

Άρα ο αριθμός $v = \frac{2z-w}{2z+w}$ είναι φανταστικός

δ) Είναι:

$$(\Gamma A) = |w - z_1| \quad \text{και} \quad (\Gamma B) = |w - z_2|$$

Για τους μιγαδικούς αριθμούς w, z_1 από τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$$\left| |w| - |z_1| \right| \leq |w + z_1| \leq |w| + |z_1| \quad (6)$$

Αν στη σχέση (6) θέσουμε, όπου z_1 το $-z_1$ έχουμε:

$$\left| |w| - |-z_1| \right| \leq |w + (-z_1)| \leq |w| + |-z_1| \stackrel{|-z_1|=|z_1|}{\Leftrightarrow}$$

$$\left| |w| - |z_1| \right| \leq |w - z_1| \leq |w| + |z_1| \Leftrightarrow$$

$$|2\alpha - \alpha| \leq |w - z_1| \leq 2\alpha + \alpha \Leftrightarrow \alpha \leq (\Gamma A) \leq 3\alpha \quad (7)$$

Ομοίως για τους μιγαδικούς αριθμούς w, z_2 έχουμε:

$$\alpha \leq |w - z_2| \leq 3\alpha \Leftrightarrow \alpha \leq (\Gamma B) \leq 3\alpha, \quad \text{οπότε} \quad \frac{1}{3\alpha} \leq \frac{1}{(\Gamma B)} \leq \frac{1}{\alpha} \quad (8)$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις σχέσεις (7) και (8) έχουμε:

$$\frac{\alpha}{3\alpha} \leq \frac{(\Gamma\Lambda)}{(\Gamma\beta)} \leq \frac{3\alpha}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{(\Gamma\Lambda)}{(\Gamma\beta)} \leq 3$$

ΘΕΜΑ 5ο :

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς w και z , για τους οποίους ισχύει ότι:

- $25|w|^2 = 180 + |5w - 6 - 12i|^2$
- Οι εικόνες $K(z)$ των μιγαδικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο είναι τα κέντρα των κύκλων εκείνων που εφάπτονται εσωτερικά του κύκλου $C_1: (E, 4)$, όπου $E(1, 0)$ και διέρχονται από το σημείο $E'(-1, 0)$

Να βρείτε:

- Το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w στο μιγαδικό επίπεδο.
- Το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο.
- Την ελάχιστη τιμή του μέτρου $|z - w|$
- Τους μιγαδικούς z_1, z_2, z_3, z_4 από τους μιγαδικούς αριθμούς z , που οι εικόνες τους είναι κορυφές τετραγώνου με πλευρές παράλληλες προς τους άξονες $x'x$ και $y'y$

ΛΥΣΗ

α) Έστω $w = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} 25|w|^2 &= 180 + |5w - 6 - 12i|^2 \Leftrightarrow \\ 25|x + yi|^2 &= 180 + |5(x + yi) - 6 - 12i|^2 \Leftrightarrow \\ 25|x + yi|^2 &= 180 + |(5x - 6) + (5y - 12)i|^2 \Leftrightarrow \\ 25(x^2 + y^2) &= 180 + (5x - 6)^2 + (5y - 12)^2 \Leftrightarrow \\ 25x^2 + 25y^2 &= 180 + 25x^2 - 60x + 36 + 25y^2 - 120y + 144 \Leftrightarrow \\ 60x + 120y - 360 &= 0 \Leftrightarrow x + 2y - 6 = 0 \end{aligned}$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w στο μιγαδικό επίπεδο είναι η ευθεία $\varepsilon: x + 2y - 6 = 0$

β) Αν Δ είναι το σημείο επαφής ενός κύκλου κέντρου $K(z)$ με τον κύκλο C_1 , τότε ισχύει:

$$(KE) = 4 - (K\Delta) \quad (1), \text{ με } (K\Delta) < 4$$

Επειδή $(K\Delta) = (KE')$ η σχέση (1) ισοδύναμα γράφεται:

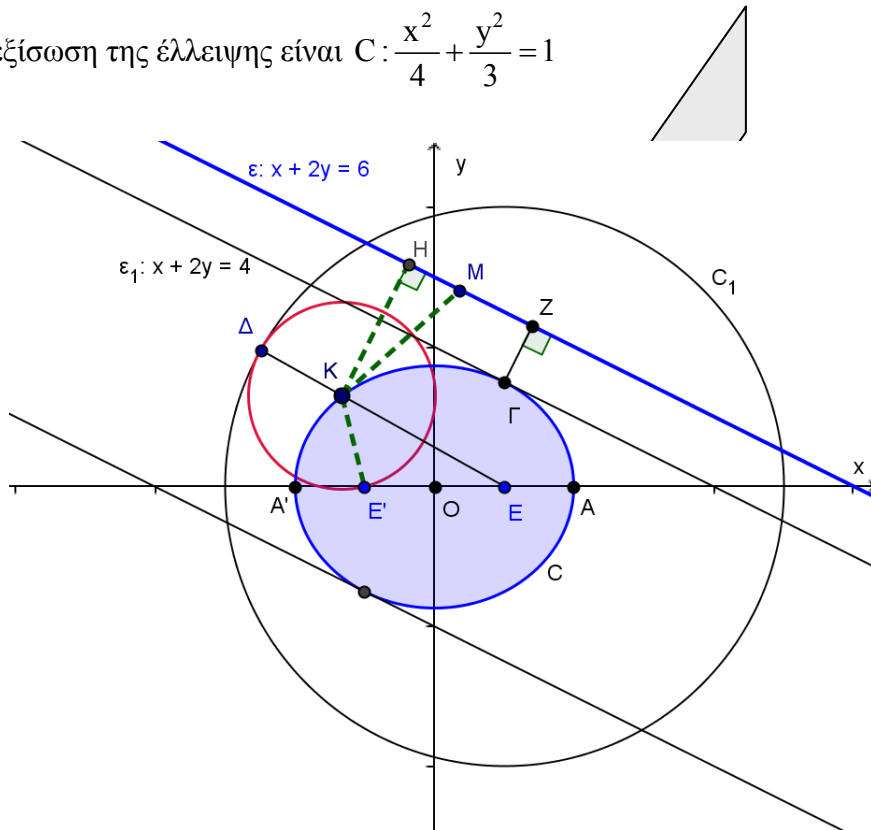
$$(KE) = 4 - (KE') \Leftrightarrow (KE) + (KE') = 4 \quad \text{και} \quad (E'E) = 2 < 4$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των σημείων K , που είναι οι εικόνες των μιγαδικών z στο επίπεδο είναι έλλειψη με εστίες τα σημεία $E'(-1, 0)$, $E(1, 0)$ και μεγάλο άξονα $A'A$ με $(A'A) = 2a = 4$, οπότε $a = 2$

Είναι:

$$2\gamma = (E'E) = 2 \Leftrightarrow \gamma = 1 \quad \text{και} \quad \beta^2 = a^2 - \gamma^2 \Leftrightarrow \beta^2 = 3$$

Επομένως η εξίσωση της έλλειψης είναι $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$



γ) Έστω $K(z)$ και $M(w)$ οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, w στο μιγαδικό επίπεδο, τότε είναι $|z - w| = (KM) \geq (KH) \geq (\Gamma Z)$, όπου $KH \perp (\varepsilon)$ και Γ εκείνο το σημείο της έλλειψης C , στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη προς την ευθεία ε και απέχει από αυτή τη μικρότερη απόσταση.

Εύρεση του Γ :

Έστω $\Gamma(x_1, y_1)$ σημείο της έλλειψης C τότε ισχύει:

$$\frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{3} = 1 \quad (1)$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης ε_1 στο σημείο Γ είναι:

$$\varepsilon_1: \frac{xx_1}{4} + \frac{yy_1}{3} = 1$$

Είναι

$$\varepsilon_1 // \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1} = \lambda_{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{y_1 \neq 0}{-4y_1} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow y_1 = \frac{3}{2}x_1 \quad (2)$$

Από την (1) έχουμε:

$$\frac{x_1^2}{4} + \frac{9}{4} \frac{x_1^2}{3} = 1 \Leftrightarrow x_1^2 = 1 \Leftrightarrow x_1 = \pm 1$$

- Για $x_1 = 1$ είναι $y_1 = \frac{3}{2}$, άρα $\Gamma_1 \left(1, \frac{3}{2} \right)$

- Για $x_1 = -1$ είναι $y_1 = -\frac{3}{2}$, άρα $\Gamma_2\left(-1, -\frac{3}{2}\right)$

Οι εφαπτόμενες της έλλειψης C , στα σημεία της Γ_1 και Γ_2 είναι παράλληλες προς την ευθεία ε και

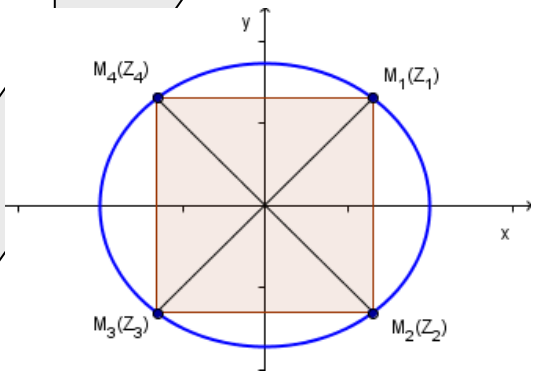
- $d(\Gamma_1, \varepsilon) = \frac{|1 + 2 \cdot \frac{3}{2} - 6|}{\sqrt{1+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
- $d(\Gamma_2, \varepsilon) = \frac{|-1 - 2 \cdot \frac{3}{2} - 6|}{\sqrt{1+2^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$

Δηλαδή $d(\Gamma_1, \varepsilon) < d(\Gamma_2, \varepsilon)$, άρα το ζητούμενο σημείο Γ είναι το Γ_1
Είναι:

$$|z - w| = (KM) \geq (KH) \geq (\Gamma Z) = d(\Gamma, \varepsilon) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Άρα η ελάχιστη τιμή του μέτρου $|z - w|$ είναι $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

δ) Έστω τα σημεία M_1, M_2, M_3, M_4 της έλλειψης C , που είναι οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2, z_3, z_4 αντίστοιχα, με $z_1 = x_1 + y_1 i$, $x_1, y_1 > 0$, ώστε το τετράπλευρο $M_1 M_2 M_3 M_4$ να είναι τετράγωνο με πλευρές παράλληλες προς τους άξονες $x'x$ και $y'y$



Λόγω των συμμετριών ισχύει:

$$z_2 = \bar{z}_1, z_3 = -z_1 \text{ και } z_4 = -\bar{z}_1$$

Είναι:

- $(M_1 M_2) = (M_1 M_4) \Leftrightarrow |z_1 - z_2| = |z_1 - z_4| \Leftrightarrow |z_1 - \bar{z}_1| = |z_1 - (-\bar{z}_1)| \Leftrightarrow |2y_1 i| = |2x_1| \Leftrightarrow y_1 = x_1 \quad (3)$

- $\frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{3} = 1 \quad (4)$, γιατί το σημείο $M_1 \in (C)$

Από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων (3) και (4) προκύπτει ότι:

$$x_1 = y_1 = \frac{2\sqrt{21}}{7}, \text{ γιατί } x_1, y_1 > 0$$

Άρα οι ζητούμενοι μιγαδικοί αριθμοί είναι:

$$z_1 = \frac{2\sqrt{21}}{7}(1+i), z_2 = \frac{2\sqrt{21}}{7}(1-i), z_3 = \frac{2\sqrt{21}}{7}(-1-i) \text{ και } z_4 = \frac{2\sqrt{21}}{7}(-1+i)$$

ΘΕΜΑ 6ο :

Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση:

$$(f^2(x) + g^2(x))' = 2f'(x) + 2g'(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

και οι μιγαδικοί αριθμοί $z_x = f(x) + g(x)i$

α) Αν $f(1)=4$ και $g(1)=-3$, τότε:

- Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z_x κινούνται σε κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.
- Να βρείτε την ελάχιστη και την μέγιστη τιμή του αθροίσματος $f^2(x)+g^2(x)$, στην περίπτωση που ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z_x είναι ο κύκλος του προηγούμενου ερωτήματος.

β) Αν υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ ώστε $z_a = 1+i$, τότε:

- Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = z_a^{2012} - \bar{z}_a^{2012}$
- Να βρείτε τις συναρτήσεις f, g

ΛΥΣΗ

α) i) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\begin{aligned} (f^2(x) + g^2(x))' &= 2f'(x) + 2g'(x) \Rightarrow \\ 2f(x)f'(x) + 2g(x)g'(x) &= 2f'(x) + 2g'(x) \Rightarrow \\ 2f'(x)(f(x)-1) + 2g'(x)(g(x)-1) &= 0 \Rightarrow \\ [(f(x)-1)^2 + (g(x)-1)^2]' &= 0 \Rightarrow \\ (f(x)-1)^2 + (g(x)-1)^2 &= c \quad (2) \end{aligned}$$

Για $x=1$ από τη σχέση (2) έχουμε:

$$\begin{aligned} (f(1)-1)^2 + (g(1)-1)^2 &= c \Leftrightarrow \\ 3^2 + (-4)^2 &= c \Leftrightarrow c = 25 \end{aligned}$$

Άρα, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$(f(x)-1)^2 + (g(x)-1)^2 = 25$$

που σημαίνει ότι οι εικόνες των μιγαδικών z_x κινούνται σε κύκλο με κέντρο $K(1, 1)$ και ακτίνα $\rho = 5$

- Για κάθε μιγαδικό αριθμό z_x ισχύει $|z_x|^2 = f^2(x) + g^2(x)$, οπότε το άθροισμα $f^2(x) + g^2(x)$ λαμβάνει την ελάχιστη (μέγιστη) τιμή του, όταν το μέτρο του z_x λαμβάνει την ελάχιστη (μέγιστη) τιμή.

Η ελάχιστη τιμή του $|z_x|$ είναι ίση με:

$$(OA) = (AK) - (OK) = 5 - \sqrt{2}$$

Η μέγιστη τιμή του $|z_x|$ είναι ίση με:

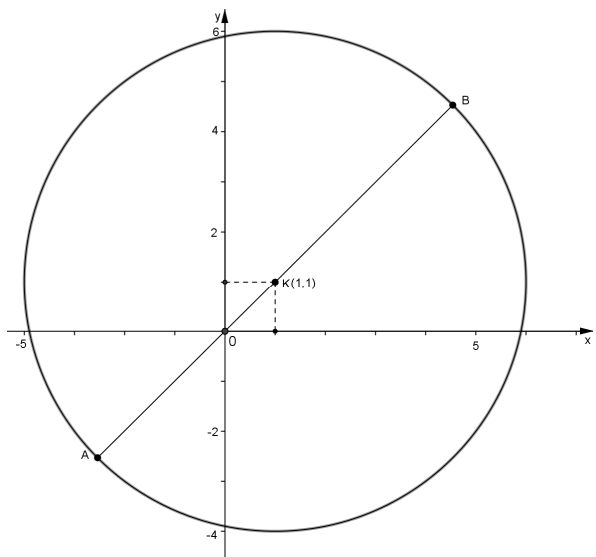
$$(OB) = (BK) + (OK) = 5 + \sqrt{2}$$

Επομένως η ελάχιστη τιμή του αθροίσματος είναι:

$$m = (5 - \sqrt{2})^2 = 27 - 10\sqrt{2}$$

και η μέγιστη τιμή του είναι:

$$M = (5 + \sqrt{2})^2 = 27 + 10\sqrt{2}$$



β) i) Είναι:

$$z_\alpha^{2012} = (1+i)^{2012} = [(1+i)^2]^{1006} = (2i)^{1006} = -2^{1006}$$

και

$$\bar{z}_\alpha^{2012} = (1-i)^{2012} = [(1-i)^2]^{1006} = (-2i)^{1006} = -2^{1006}$$

οπότε $A = 0$

ii) Για $x = \alpha$ έχουμε:

$$z_\alpha = f(\alpha) + g(\alpha)i \stackrel{z_\alpha = 1+i}{\Leftrightarrow} f(\alpha) + g(\alpha)i = 1+i \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) = 1 \\ g(\alpha) = 1 \end{cases}$$

και η σχέση (2) γίνεται:

$$(f(\alpha) - 1)^2 + (g(\alpha) - 1)^2 = c \Leftrightarrow$$

$$(1 - 1)^2 + (1 - 1)^2 = c \Leftrightarrow c = 0$$

Αρα, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$(f(x) - 1)^2 + (g(x) - 1)^2 = 0$$

Επομένως:

$$f(x) = 1, x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x) = 1, x \in \mathbb{R}$$

ΘΕΜΑ 7ο :

Έστω $f(z) = z + \frac{4}{z}$, όπου z μιγαδικός αριθμός με $z \neq 0$

α) Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2 , για τους οποίους ισχύει $f(z) = 2$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 και $z_3 = \frac{z_1^4 z_2 + z_1 z_2^4}{32}$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές ισοπλευρού τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο με κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = 2$

β) Αν $f(z) \in \mathbb{R}$ και $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, τότε:

i) Να βρείτε το όριο $\lim_{h \rightarrow +\infty} (\ln(|z|^h + 1) - h)$

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{(t-2)^2(f(z)+4)}{t} + \frac{t^{2012}(4-f(z))}{t-2} = 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα ως προς t στο διάστημα $(0, 2)$

γ) Αν $|f(z)| = |z|$, $z \in \mathbb{C}^*$, τότε:

i) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο.

ii) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z_4 - z_5|$ όπου z_4, z_5 δύο από τους μιγαδικούς z του (γ. i) ερωτήματος με $\text{Im}(z_4) \cdot \text{Im}(z_5) < 0$

ΛΥΣΗ

$$\alpha) f(z) = 2 \Leftrightarrow z + \frac{4}{z} = 2 \Leftrightarrow z^2 + 4 = 2z \Leftrightarrow z^2 - 2z + 4 = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{2 \pm 2i\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow z = 1 \pm \sqrt{3} \cdot i$$

$$\text{Άρα } z_1 = 1 + \sqrt{3} \cdot i \text{ και } z_2 = 1 - \sqrt{3} \cdot i \quad (2)$$

Είναι:

$$z_3 = \frac{z_1^4 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_2^4}{32} = \frac{z_1 z_2}{32} \cdot (z_1^3 + z_2^3) =$$

$$= \frac{z_1 z_2}{32} \cdot (z_1 + z_2) \cdot (z_1^2 - z_1 \cdot z_2 + z_2^2) \stackrel{(1)}{=} \frac{4}{32} \cdot 2 \cdot (-8) = -2$$

$$\text{γιατί } z_1 \cdot z_2 = 4, \quad z_1 + z_2 = 2 \text{ και } z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + z_2)^2 - 2(z_1 \cdot z_2) = 2^2 - 2 \cdot 4 = -4$$

Ισχύει:

$$|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1| = 2\sqrt{3} \quad \text{και} \quad |z_1| = |z_2| = |z_3| = 2$$

Άρα οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 και z_3 στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο με κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = 2$

β) i) Έχουμε:

$$f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(z) = \overline{f(z)} \Leftrightarrow z + \frac{4}{z} = \overline{\left(z + \frac{4}{z}\right)} \Leftrightarrow z + \frac{4}{z} = \bar{z} + \frac{4 \cdot (\bar{z})}{\bar{z}}$$

$$z \cdot (z \cdot \bar{z}) + 4 \cdot \bar{z} = \bar{z} \cdot (z \cdot \bar{z}) + 4 \cdot z \Leftrightarrow z \cdot |z|^2 + 4 \cdot \bar{z} = \bar{z} \cdot |z|^2 + 4 \cdot z \Leftrightarrow$$

$$|z|^2 (z - \bar{z}) - 4 \cdot (z - \bar{z}) = 0 \Leftrightarrow (z - \bar{z})(|z|^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$z - \bar{z} = 0 \text{ ή } |z|^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow z = \bar{z} \text{ ή } |z|^2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$z \in \mathbb{R} \text{ ή } |z| = 2 \Leftrightarrow |z| = 2 \quad (3)$$

Είναι:

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} (\ln(|z|^h + 1) - h) = \lim_{h \rightarrow +\infty} (\ln(2^h + 1) - \ln e^h) =$$

$$= \lim_{h \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{2^h + 1}{e^h} \right) = \lim_{h \rightarrow +\infty} \ln \left(\left(\frac{2}{e} \right)^h + \left(\frac{1}{e} \right)^h \right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln t = -\infty, \text{ γιατί αν θέσουμε}$$

$$t = \left(\frac{2}{e} \right)^h + \left(\frac{1}{e} \right)^h \text{ τότε } \lim_{h \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{2}{e} \right)^h + \left(\frac{1}{e} \right)^h \right) = 0$$

ii) Είναι:

$$\frac{(t-2)^2(f(z)+4)}{t} + \frac{t^{2012}(4-f(z))}{t-2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(t-2)^3(f(z)+4) + t^{2013}(4-f(z)) = 0 \quad (4)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(t) = t^{2013}(4 - f(z)) + (t - 2)^3(f(z) + 4), \quad t \in [0, 2]$$

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 2]$ ως άθροισμα συνεχών και $g(0) \cdot g(2) < 0$, γιατί $g(0) = -8 \cdot (f(z) + 4) < 0$ και

$$g(2) = 2^{2013}(4 - f(z)) > 0, \text{ λόγω της (5).}$$

Ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, άρα στο διάστημα $(0, 2)$ η εξίσωση $g(t) = 0$, λόγω της (4) είναι ισοδύναμη με την

$$\text{εξίσωση } \frac{(t-2)^2(f(z)+4)}{t} + \frac{t^{2012}(4-f(z))}{t-2} = 0,$$

οπότε η δοθείσα εξίσωση έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 2)$.

Η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 2)$, επειδή

$$g'(t) = 2013t^{2012}(4 - f(z)) + 3(t - 2)^2(f(z) + 4) > 0$$

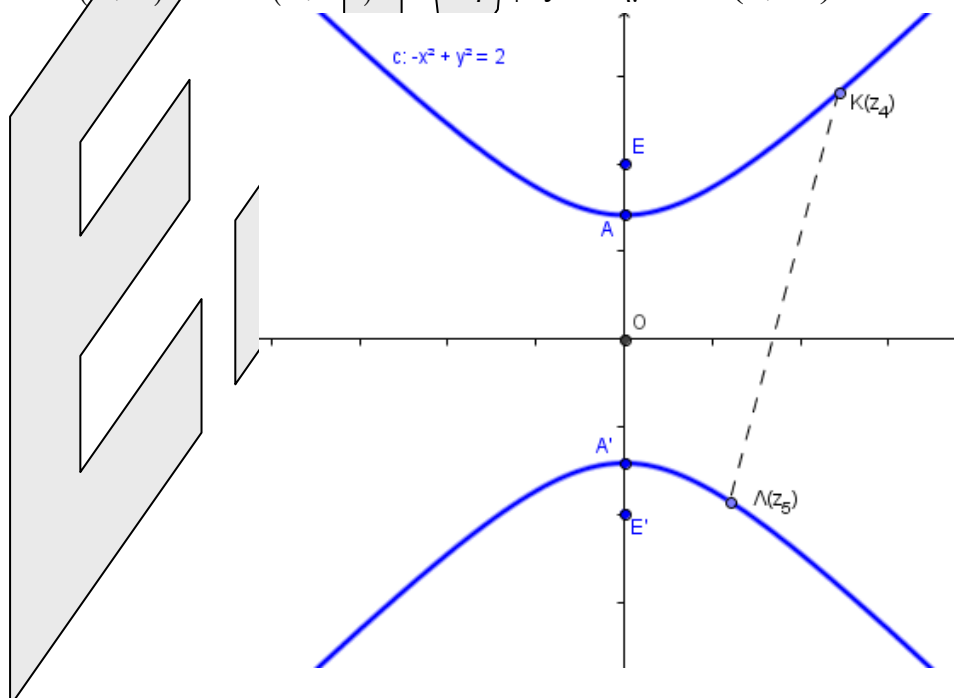
για κάθε $t \in (0, 2)$, άρα η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

Από το (β) ερώτημα έχουμε ότι:
 $f(z) \in \mathbb{R}$ και $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$
 και από την (3) έχουμε ότι $|z| = 2$
 Είναι: $|f(z)| \leq |z| + \frac{4}{|z|} = 2 + \frac{4}{2} = 4$,
 δηλαδή $|f(z)| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq f(z) \leq 4$,
 όμως $f(z) = 4 \Leftrightarrow z + \frac{4}{z} = 4 \Leftrightarrow z = 2$
 και $f(z) = -4 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow z = -2$
 και επειδή $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ τελικά ισχύει
 $-4 < f(z) < 4$ (5)

γ) i) Έστω $z = x + yi, z \neq 0$

$$\begin{aligned} |f(z)| = |z| &\Leftrightarrow \left| z + \frac{4}{z} \right| = |z| \Leftrightarrow |z^2 + 4| = |z|^2 \Leftrightarrow |z^2 + 4|^2 = (z \cdot \bar{z})^2 \Leftrightarrow \\ (z^2 + 4)((\bar{z})^2 + 4) &= z^2(\bar{z})^2 \Leftrightarrow z^2(\bar{z})^2 + 4z^2 + 4(\bar{z})^2 + 16 = z^2(\bar{z})^2 \Leftrightarrow \\ z^2 + (\bar{z})^2 + 4 &= 0 \Leftrightarrow 2(x^2 - y^2) + 4 = 0 \Leftrightarrow y^2 - x^2 = 2 \end{aligned}$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο είναι η ισοσκελής υπερβολή $c: y^2 - x^2 = 2$ με $\alpha = \beta = \sqrt{2}$ και $\gamma = 2$, που έχει εστίες τα σημεία $E(0, 2)$ και $E'(0, -2)$ και κορυφές τα σημεία $A(0, \sqrt{2})$ και $A'(0, -\sqrt{2})$



ii) Είναι:

$$\operatorname{Im}(z_4) \cdot \operatorname{Im}(z_5) < 0$$

Άρα οι εικόνες των z_4, z_5 στο επίπεδο θα βρίσκονται σε διαφορετικό κλάδο της υπερβολής $c: y^2 - x^2 = 2$. Αν K, Λ οι εικόνες των z_4, z_5 αντιστοίχως, τότε έχουμε:

$$|z_4 - z_5| = (K\Lambda) \geq (AA') = 2\sqrt{2}$$

Άρα η ελάχιστη τιμή του $|z_4 - z_5|$ είναι η $2\sqrt{2}$

ΘΕΜΑ 8ο :

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

• $f(x) \geq e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (1)

• $f(x)f(-x) = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (2)

α) Να βρείτε το $f(0)$ και να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$

β) Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$

i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης g

iii) Αν για τους θετικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει $\ln\alpha + \ln\beta + \ln\gamma = 1$, να αποδείξετε ότι

$$\alpha e^{\beta+\gamma} + \beta e^{\alpha+\gamma} + \gamma e^{\alpha+\beta} \geq 3e^3$$

ΛΥΣΗ

α) Για $x = 0$ από τις σχέσεις (1) και (2) αντίστοιχα έχουμε:

$$f(0) \geq 1 \quad \text{και} \quad f^2(0) = 1$$

Άρα $f(0) = 1$

Επίσης, αν θέσουμε όπου x το $-x$, από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f(-x) \geq e^{-x} \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \frac{1}{f(x)} \geq \frac{1}{e^x} \Rightarrow f(x) \leq e^x, \quad x \in \mathbb{R} \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1) και (3) έχουμε:

$$f(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

β) i) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$g(x) = \frac{e^x}{x}$$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, με

$$g'(x) = \frac{e^x x - e^x}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$$

Είναι:

• $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)e^x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$

• $g'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)e^x}{x^2} > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Το πρόσημο της $g'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	0
$g(x)$		+	
		e	

ελάχιστο

- Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 1]$
- Η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$
- Η συνάρτηση g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$ με ελάχιστη τιμή $g(1) = e$

ii) Είναι:

$$\circ \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \cdot e^x \right) = +\infty$$

$$\circ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \stackrel{D.L.H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

- Η συνάρτηση g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0, 1]$, άρα

$$g(\Delta_1) = [g(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)] = [e, +\infty)$$

- Η συνάρτηση g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1, +\infty)$, άρα

$$g(\Delta_2) = [g(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)] = [e, +\infty)$$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης g είναι:

$$g(\Delta) = g(\Delta_1) \cup g(\Delta_2) = [e, +\infty)$$

iii) Είναι:

$$\bullet \ln \alpha + \ln \beta + \ln \gamma = 1 \Leftrightarrow \ln(\alpha\beta\gamma) = 1 \Leftrightarrow \alpha\beta\gamma = e \quad (4)$$

$$\bullet g(\alpha) = \frac{e^\alpha}{\alpha} \geq e, \quad g(\beta) = \frac{e^\beta}{\beta} \geq e \quad \text{και} \quad g(\gamma) = \frac{e^\gamma}{\gamma} \geq e$$

Επομένως

$$g(\alpha)g(\beta) + g(\beta)g(\gamma) + g(\gamma)g(\alpha) \geq 3e^2 \Rightarrow$$

$$\frac{e^\alpha}{\alpha} \cdot \frac{e^\beta}{\beta} + \frac{e^\beta}{\beta} \cdot \frac{e^\gamma}{\gamma} + \frac{e^\gamma}{\gamma} \cdot \frac{e^\alpha}{\alpha} \geq 3e^2 \Rightarrow$$

$$\frac{\gamma e^{\alpha+\beta} + \alpha e^{\beta+\gamma} + \beta e^{\gamma+\alpha}}{\alpha\beta\gamma} \geq 3e^2 \stackrel{(4)}{\Rightarrow}$$

$$\frac{\alpha e^{\beta+\gamma} + \beta e^{\gamma+\alpha} + \gamma e^{\alpha+\beta}}{e} \geq 3e^2 \Rightarrow$$

$$\alpha e^{\beta+\gamma} + \beta e^{\gamma+\alpha} + \gamma e^{\alpha+\beta} \geq 3e^3$$

ΘΕΜΑ 9ο :

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$\sin^2 f(x) + 4f(x) = x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = \eta\mu x$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$

ΛΥΣΗ

α) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$, τότε έχουμε:

$$\bullet \sin f(x_1) = \sin f(x_2) \Rightarrow \sin^2 f(x_1) = \sin^2 f(x_2) \quad (2)$$

$$\bullet 4f(x_1) = 4f(x_2) \quad (3)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε:

$$\sin^2 f(x_1) + 4f(x_1) = \sin^2 f(x_2) + 4f(x_2) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} x_1 = x_2$$

Άρα η συνάρτηση f είναι «1-1», οπότε αντιστρέφεται.

Από υπόθεση γνωρίζουμε ότι το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το \mathbb{R} , επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1} είναι το \mathbb{R} .

Για να ορίσουμε τη συνάρτηση f^{-1} απομένει να βρούμε τον τύπο της

Ισχύει η ισοδυναμία:

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

οπότε η σχέση (1) ισοδύναμα γράφεται:

$$\sin^2 y + 4y = f^{-1}(y) \quad \text{ή} \quad f^{-1}(y) = 4y + \sin^2 y$$

Άρα η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι:

$$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{με} \quad f^{-1}(x) = 4x + \sin^2 x$$

β) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , άρα και η συνάρτηση $\sin f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων, όπως επίσης και η συνάρτηση $\sin^2 f(x)$

Παραγωγίζοντας λοιπόν και τα δύο μέλη της σχέσης (1) έχουμε:

$$2\sin f(x)(\sin f(x))' + 4f'(x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$-2\sin f(x)\eta\mu f(x)f'(x) + 4f'(x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$(4 - 2\sin f(x)\eta\mu f(x)) \cdot f'(x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{4 - 2\eta\mu f(x)\sin f(x)}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

1^{ος} τρόπος:

$$\begin{cases} |\eta\mu f(x)| \leq 1 \\ |\sigma\upsilon\nu f(x)| \leq 1 \end{cases} \Rightarrow |\eta\mu f(x)| \cdot |\sigma\upsilon\nu f(x)| \leq 1 \Rightarrow$$

$$|\eta\mu f(x)\sigma\upsilon\nu f(x)| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \eta\mu f(x)\sigma\upsilon\nu f(x) \leq 1 \Rightarrow$$

$$2\eta\mu f(x)\sigma\upsilon\nu f(x) \leq 2 \Rightarrow 2 - 2\eta\mu f(x)\sigma\upsilon\nu f(x) \geq 0 \Rightarrow$$

$$4 - 2\eta\mu f(x)\sigma\upsilon\nu f(x) > 0$$

2^{ος} τρόπος:

$$4 - 2\eta\mu f(x)\sigma\upsilon\nu f(x) = 3 + 1 - 2\eta\mu f(x)\sigma\upsilon\nu f(x) =$$

$$= 3 + \eta\mu^2 f(x) + \sigma\upsilon\nu^2 f(x) - 2\eta\mu f(x)\sigma\upsilon\nu f(x) =$$

$$= 3 + (\eta\mu f(x) - \sigma\upsilon\nu f(x))^2 > 0$$

οπότε:

$$f'(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R}

γ) Για $x = 0$ έχουμε:

$$f^{-1}(0) = 1 \Leftrightarrow f(1) = 0$$

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1)$$

Όμως:

$$f'(1) = \frac{1}{4 - 2\eta\mu f(1)\sigma\upsilon\nu f(1)} = \frac{1}{4 - 2\eta\mu 0 \cdot \sigma\upsilon\nu 0} = \frac{1}{4}$$

Άρα:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \frac{1}{4}$$

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f^{-1}(x) - \eta\mu x = 4x + \sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$

- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

- $h\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cdot h(0) = \frac{1 + \sqrt{2} - 2\pi}{2} \cdot 1 < 0$

Άρα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano, οπότε η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει

μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$

Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$ είναι:

$$h'(x) = 4 - 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu x = \underbrace{4 - \sigma\upsilon\nu x}_{>0} + \underbrace{(-2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x)}_{>0} > 0$$

Άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$, οπότε η ρίζα είναι μοναδική.

ΘΕΜΑ 10ο :

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο a με $a > 0$ και ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\bullet f(xy) = f(x)f(y) \text{ για κάθε } x, y > 0 \quad (1)$$

$$\bullet f(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x > 0 \quad (2)$$

A) Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) f(1) = 1 \text{ και } f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)} \text{ για κάθε } x > 0$$

$$\beta) f(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \geq 0$$

$$\gamma) \text{ η συνάρτηση } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } (0, +\infty) \text{ με } \frac{xf'(x)}{f(x)} = \frac{af'(a)}{f(a)} \text{ για κάθε } x > 0$$

B) Αν η ευθεία $\varepsilon: x - 2\sqrt{a} \cdot y + a = 0$ είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(a, f(a))$, να βρείτε τον τύπο της f .

ΛΥΣΗ

A) α) Για $y = 1$ και $x > 0$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f(x \cdot 1) = f(x)f(1) \Leftrightarrow f(x) = f(x)f(1) \Leftrightarrow f(x)(1 - f(1)) = 0 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} f(1) = 1 \quad (3)$$

Για $x > 0$ και $y = \frac{1}{x}$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow f(1) = f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)} \quad (4)$$

β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται στο διάστημα $(0, +\infty)$, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0, +\infty)$ και επειδή $f(1) = 1 > 0$ συμπεραίνουμε ότι :

$$f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty) \quad (5)$$

Από την υπόθεση είναι $f(0) = 0$, οπότε τελικά έχουμε $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \geq 0$

γ) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $a > 0$, οπότε ισχύει $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ (6)

Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε τυχαίο $x_0 \in (0, +\infty)$

Έστω $x_0 \in (0, +\infty)$, τότε για κάθε $x \in (0, +\infty)$ με $x \neq x_0$ θέτουμε $x = x_0 \frac{h}{\alpha}$ με $h > 0$, οπότε όταν το $x \rightarrow x_0$ το $h \rightarrow \alpha$ και έχουμε

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f\left(x_0 \frac{h}{\alpha}\right) - f(x_0)}{x_0 \frac{h}{\alpha} - x_0} \stackrel{(1)}{=} \frac{f(x_0)f\left(\frac{h}{\alpha}\right) - f(x_0)}{\frac{x_0(h - \alpha)}{\alpha}} = \frac{\alpha f(x_0)}{x_0} \cdot \frac{f\left(\frac{h}{\alpha}\right) - 1}{h - \alpha} \stackrel{(1)}{=} f'(a)$$

$$= \frac{\alpha f(x_0)}{x_0} \cdot \frac{f(h)f\left(\frac{1}{\alpha}\right) - 1}{h - \alpha} \stackrel{(4)}{=} \frac{\alpha f(x_0)}{x_0} \cdot \frac{f(h) \frac{1}{f(\alpha)} - 1}{h - \alpha} = \frac{\alpha f(x_0)}{x_0 f(\alpha)} \cdot \frac{f(h) - f(\alpha)}{h - \alpha}$$

Είναι:

- $\lim_{h \rightarrow \alpha} \frac{\alpha f(x_0)}{x_0 f(\alpha)} = \frac{\alpha f(x_0)}{x_0 f(\alpha)}$, αφού $\frac{\alpha f(x_0)}{x_0 f(\alpha)}$ σταθερά.
- $\lim_{h \rightarrow \alpha} \frac{f(h) - f(\alpha)}{h - \alpha} \stackrel{(6)}{=} f'(\alpha)$

Επομένως

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{h \rightarrow \alpha} \left(\frac{\alpha f(x_0)}{x_0 f(\alpha)} \cdot \frac{f(h) - f(\alpha)}{h - \alpha} \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow \alpha} \frac{\alpha f(x_0)}{x_0 f(\alpha)} \cdot \lim_{h \rightarrow \alpha} \frac{f(h) - f(\alpha)}{h - \alpha} = \frac{\alpha f(x_0)}{x_0 f(\alpha)} \cdot f'(\alpha) \end{aligned}$$

Άρα η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in (0, +\infty)$ με $f'(x_0) = \frac{\alpha f(x_0)}{x_0 f(\alpha)} \cdot f'(\alpha)$,

οπότε είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{\alpha f(x)}{x f(\alpha)} \cdot f'(\alpha)$

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$f'(x) = \frac{\alpha f(x)}{x f(\alpha)} \cdot f'(\alpha) \Leftrightarrow \stackrel{(2)}{x f'(x)} = \frac{\alpha f'(\alpha)}{f(\alpha)} \quad (7)$$

B) Είναι:

$$M(\alpha, f(\alpha)) \in (\varepsilon) \Leftrightarrow \alpha - 2\sqrt{\alpha} \cdot f(\alpha) + \alpha = 0 \Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{\alpha} \cdot f(\alpha) = 2\alpha \Leftrightarrow f(\alpha) = \frac{2\alpha}{2\sqrt{\alpha}} \Leftrightarrow f(\alpha) = \sqrt{\alpha} \quad (8)$$

$$f'(\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}, \quad \alpha > 0 \quad (9)$$

Από τις σχέσεις (7), (8) και (9) έχουμε:

$$\frac{x f'(x)}{f(x)} = \frac{\alpha \cdot \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}}{\sqrt{\alpha}} \Leftrightarrow \frac{x f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2x} \Leftrightarrow (\ln f(x))' = \left(\frac{1}{2} \ln x \right)' \Leftrightarrow$$

$$\ln f(x) = \frac{1}{2} \ln x + c \Leftrightarrow \stackrel{(5)}{\ln f(x)} = \ln \sqrt{x} + c, \quad x > 0 \quad (10)$$

Για $x = \alpha$ από τη σχέση (10) έχουμε:

$$\ln f(\alpha) = \ln \sqrt{\alpha} + c \stackrel{(8)}{\Leftrightarrow} \ln \sqrt{\alpha} = \ln \sqrt{\alpha} + c \Leftrightarrow c = 0$$

Επομένως από τη σχέση (10) έχουμε:

$$\ln f(x) = \ln \sqrt{x} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x}, \quad x > 0$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο 0 με $f(0) = 0$, συμπεραίνουμε ότι:

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x \geq 0$$

ΘΕΜΑ 11ο :

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $f(\alpha) < f'(x) < f(\beta)$ (1), όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha = \beta - 1 > 0$ (2). Να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Η συνάρτηση $g(x) = f(x) - f(\alpha) \cdot x$ είναι γνησίως αύξουσα και ότι $f(\alpha) < \frac{f(\beta)}{2}$

γ) Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια ακριβώς λύση στο $(-\beta, \alpha)$

δ) Υπάρχουν $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε να ισχύει $\frac{f(\beta)}{f'(x_3)} + \frac{f(\alpha)}{f'(x_2)} - 2 \frac{f(-\beta)}{f'(x_1)} = 4\beta - 1$

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[\alpha, \beta]$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f'(\xi) < f(\beta) \Leftrightarrow \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} < f(\beta) \quad (3)$$

Είναι:

$$\alpha = \beta - 1 \Leftrightarrow \beta - \alpha = 1 \quad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε:

$$f(\beta) - f(\alpha) < f(\beta) \Leftrightarrow -f(\alpha) < 0 \Leftrightarrow f(\alpha) > 0 \quad (5)$$

Από τις σχέσεις (1) και (5) έχουμε:

$$f'(x) > f(\alpha) > 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R}

β) 1^{ος} τρόπος:

Είναι

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \stackrel{(4)}{=} f(\beta) - f(\alpha)$$

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f(\alpha) < f'(\xi) \Rightarrow f(\alpha) < f(\beta) - f(\alpha) \Rightarrow 2f(\alpha) < f(\beta) \Rightarrow f(\alpha) < \frac{f(\beta)}{2}$$

2^{ος} τρόπος:

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $g'(x) = f'(x) - f(\alpha)$ (6)

Από τις σχέσεις (1) και (6) έχουμε:

$$g'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R}

Ισχύει:

$$\alpha < \beta \stackrel{g \uparrow}{\Leftrightarrow} g(\alpha) < g(\beta) \Leftrightarrow f(\alpha) - \alpha f(\alpha) < f(\beta) - \beta f(\alpha) \Leftrightarrow$$

$$f(\alpha) + (\beta - \alpha)f(\alpha) < f(\beta) \stackrel{(4)}{\Leftrightarrow} 2f(\alpha) < f(\beta) \Leftrightarrow f(\alpha) < \frac{f(\beta)}{2}$$

γ) Είναι:

$$\alpha = \beta - 1 > 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha > 0 \\ \beta > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha > 0 \\ -\beta < -1 \end{cases} \Rightarrow -\beta < -1 < 0 < \alpha \quad (7)$$

Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[-\beta, \alpha]$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (-\beta, \alpha)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f(\alpha) - f(-\beta)}{\alpha + \beta}$

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f(\alpha) < f'(\xi_1) \Leftrightarrow f(\alpha) < \frac{f(\alpha) - f(-\beta)}{\alpha + \beta} \Leftrightarrow \alpha f(\alpha) + \beta f(\alpha) - f(\alpha) < -f(-\beta) \Leftrightarrow$$

$$\alpha f(\alpha) + (\beta - 1)f(\alpha) < -f(-\beta) \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} 2\alpha f(\alpha) < -f(-\beta)$$

Από τις σχέσεις (5) και (7) έχουμε:

$$2\alpha f(\alpha) > 0 \text{ άρα } -f(-\beta) > 0, \text{ οπότε } f(-\beta) < 0 \quad (8)$$

Έχουμε:

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-\beta, \alpha]$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} .
- $f(-\beta)f(\alpha) < 0$, λόγω των σχέσεων (5) και (8)

Επομένως η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[-\beta, \alpha]$, άρα θα υπάρχει ένα $\rho \in (-\beta, \alpha)$ και μάλιστα μοναδικό, αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, τέτοιο ώστε $f(\rho) = 0$ (9)

δ) Είναι:

$$-\beta < \rho < \alpha < \beta$$

Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα

$$[-\beta, \rho], [\rho, \alpha] \text{ και } [\rho, \beta]$$

άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον:

- $x_1 \in (-\beta, \rho)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_1) = \frac{f(\rho) - f(-\beta)}{\rho - (-\beta)} \stackrel{(9)}{\Leftrightarrow} f'(x_1) = \frac{-f(-\beta)}{\rho + \beta} \stackrel{f'(x_1) > 0}{\Leftrightarrow} \rho + \beta = \frac{-f(-\beta)}{f'(x_1)}$
- $x_2 \in (\rho, \alpha)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_2) = \frac{f(\alpha) - f(\rho)}{\alpha - \rho} \stackrel{(9)}{\Leftrightarrow} f'(x_2) = \frac{f(\alpha)}{\alpha - \rho} \stackrel{f'(x_2) > 0}{\Leftrightarrow} \alpha - \rho = \frac{f(\alpha)}{f'(x_2)}$
- $x_3 \in (\rho, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_3) = \frac{f(\beta) - f(\rho)}{\beta - \rho} \stackrel{(9)}{\Leftrightarrow} f'(x_3) = \frac{f(\beta)}{\beta - \rho} \stackrel{f'(x_3) > 0}{\Leftrightarrow} \beta - \rho = \frac{f(\beta)}{f'(x_3)}$

Είναι:

$$\frac{f(\beta)}{f'(x_3)} + \frac{f(\alpha)}{f'(x_2)} - 2 \frac{f(-\beta)}{f'(x_1)} = (\beta - \rho) + (\alpha - \rho) + 2(\rho + \beta) = \alpha + 3\beta \stackrel{(2)}{=} 4\beta - 1$$

ΘΕΜΑ 12ο :

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$, έχει σύνολο τιμών $f(A) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και ικανοποιεί τη σχέση $\eta\mu(f(x)) = \frac{x}{x+1}$, $x \geq -\frac{1}{2}$ (1)

- Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{2x+1}}$, $x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$
- Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.
- Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τις ασύμπτωτες.

ΛΥΣΗ

- Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ και η συνάρτηση $\eta\mu x$ στο \mathbb{R} , άρα η συνάρτηση $\eta\mu f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$, ως σύνθεση παραγωγισίμων.

Η συνάρτηση $\frac{x}{x+1}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$, άρα παραγωγίζοντας και τα

δύο μέλη της σχέσης (1) για κάθε $x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ έχουμε:

$$[\eta\mu f(x)]' = \left(\frac{x}{x+1}\right)' \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu f(x) f'(x) = \frac{(x)'(x+1) - x(x+1)'}{(x+1)^2} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu f(x) f'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu f(x) f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \quad (2)$$

Είναι:

$$\eta\mu^2 f(x) + \sigma\upsilon\nu^2 f(x) = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 f(x) = 1 - \eta\mu^2 f(x) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2 f(x) = 1 - \frac{x^2}{(x+1)^2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 f(x) = \frac{2x+1}{(x+1)^2} \quad (3)$$

Για κάθε $x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ είναι:

$$-\frac{\pi}{2} < f(x) < \frac{\pi}{2}, \text{ οπότε } \sin f(x) > 0 \quad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε:

$$\sin f(x) = \frac{\sqrt{2x+1}}{x+1} \quad (5)$$

Από τις σχέσεις (2) και (5) έχουμε:

$$\frac{\sqrt{2x+1}}{x+1} \cdot f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{2x+1}}, \quad x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$, οπότε

η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$, άρα είναι και «1-1», επομένως αντιστρέφεται.

Η συνάρτηση f είναι «1-1» και έχει σύνολο τιμών $f(A) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, επομένως για κάθε

$y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ υπάρχει μοναδικό $x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ τέτοιο, ώστε $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

Άρα για κάθε $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ η σχέση (1) γράφεται:

$$\eta \mu y = \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow x \eta \mu y + \eta \mu y = x \Leftrightarrow (1 - \eta \mu y) x = \eta \mu y \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{\eta \mu y}{1 - \eta \mu y} \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{\eta \mu y}{1 - \eta \mu y}$$

Επομένως:

$$f^{-1}: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f^{-1}(x) = \frac{\eta \mu x}{1 - \eta \mu x}$$

γ) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$, άρα το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $f(A) = \left[f\left(-\frac{1}{2}\right), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\right)$ και επειδή $f(A) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

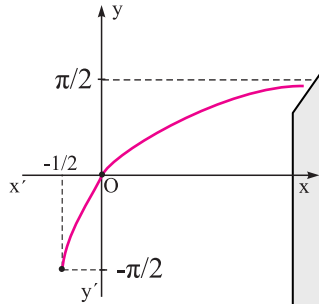
Επομένως η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την

$$\text{ευθεία } (\varepsilon) : y = \frac{\pi}{2}$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ για $x_0 \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \in \mathbb{R}$, που σημαίνει ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Σημείωση:

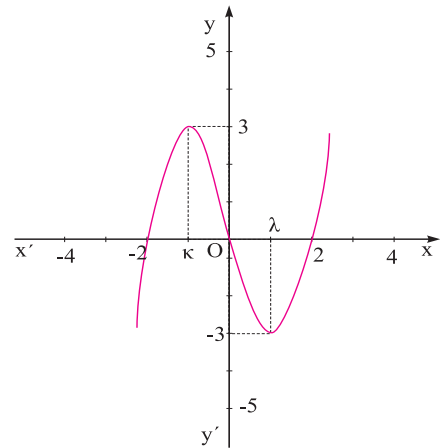
Η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



ΘΕΜΑ 13ο :

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, που έχει σημείο καμπής το $O(0,0)$ και της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = \frac{1}{f(x)}$
- β) Με δεδομένο ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g έχει ασύμπτωτες, να τις βρείτε.
- γ) Να μελετήσετε τη συνάρτησης g ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση
- δ) Αν η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική 3^{ου} βαθμού, τότε:
 - i) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ και τον τύπο της συνάρτησης f
 - ii) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$



ΛΥΣΗ

α) Για να ορίζεται η συνάρτηση g πρέπει και αρκεί $f(x) \neq 0$

Είναι:

$$f(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2 \text{ και } x \neq 0 \text{ και } x \neq 2$$

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το σύνολο $A_g = \mathbb{R} - \{-2, 0, 2\}$

β) • Από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f , προκύπτει ότι:

○ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, οπότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$

○ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$

Επομένως η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_g της συνάρτησης g και στο $-\infty$ και στο $+\infty$

• Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ για $x < -2$, οπότε $\lim_{x \rightarrow -2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1}{f(x)} = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ για $x > -2$, οπότε $\lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

Επομένως η ευθεία $x = -2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_g της συνάρτησης g (*)

• Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ για $x \in (-2, 0)$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{f(x)} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ για $x \in (0, 2)$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

Επομένως η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_g της συνάρτησης g (*)

• Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ για $x \in (0, 2)$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{f(x)} = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ για $x > 2$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

Επομένως η ευθεία $x = 2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_g της συνάρτησης g (*)

(*) Για την εύρεση μιας κατακόρυφης ασύμπτωτης, ως γνωστόν, αρκεί ένα τουλάχιστον από τα δύο πλευρικά όρια να είναι $+\infty$ ή $-\infty$. Εδώ ο υπολογισμός και των δύο πλευρικών ορίων, σε κάθε περίπτωση, έγινε γιατί μας είναι απαραίτητα για την χάραξη της γραφικής παράστασης, που ζητείται στο επόμενο ερώτημα.

γ) Για κάθε $x \in A_g = \mathbb{R} - \{-2, 0, 2\}$ έχουμε $g'(x) = \left(\frac{1}{f(x)} \right)' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$ (1)

Από τη σχέση (1) συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση g' , σε κάθε διάστημα που ορίζεται, έχει το αντίθετο πρόσημο από αυτό που έχει η συνάρτηση f' , άρα οι συναρτήσεις g και f έχουν αντίθετο είδος μονοτονίας σε κάθε διάστημα.

Επομένως:

- Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, \kappa]$, άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -2)$ και $(-2, \kappa]$
- Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[\kappa, \lambda]$, άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $[\kappa, 0)$ και $(0, \lambda]$

- Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\lambda, +\infty)$, άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $[\lambda, 2)$ και $(2, +\infty)$

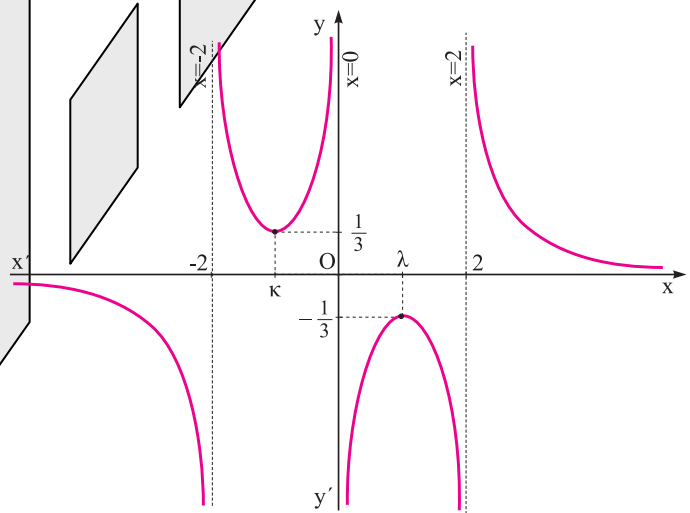
Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	-2	κ	0	λ	2	$+\infty$
$g'(x)$	-	-	0	+	+	0	-
$g(x)$	0	$+\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$

τοπ. ελάχιστο τοπ. μέγιστο

- ◆ Η συνάρτηση g στο $x_0 = \kappa$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο με τιμή $g(\kappa) = \frac{1}{f(\kappa)} = \frac{1}{3}$
- ◆ Η συνάρτηση g στο $x_1 = \lambda$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο με τιμή $g(\lambda) = \frac{1}{f(\lambda)} = -\frac{1}{3}$

Η γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης g , είναι:



- δ) i) Η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική 3^{ου} βαθμού και έχει τρεις ρίζες, τους αριθμούς $-2, 0, 2$, άρα είναι της μορφής:

$$f(x) = ax(x+2)(x-2) = ax(x^2 - 4) = a(x^3 - 4x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f'(x) = a(3x^2 - 4)$$

Είναι:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow a(3x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{4}{3}} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Άρα:

$$\kappa = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \text{και} \quad \lambda = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Είναι:

$$f(\kappa) = 3 \Leftrightarrow f\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = 3 \Leftrightarrow \alpha \left(\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3 - 4\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \right) = 3 \Leftrightarrow$$

$$\alpha \left(-\frac{8\sqrt{3}}{9} + \frac{8\sqrt{3}}{3} \right) = 3 \Leftrightarrow \frac{16\sqrt{3}}{9} \alpha = 3 \Leftrightarrow \alpha = \frac{27}{16\sqrt{3}} \Leftrightarrow \alpha = \frac{9\sqrt{3}}{16}$$

Άρα:

$$f(x) = \frac{9\sqrt{3}}{16} (x^3 - 4x), \quad x \in \mathbb{R}$$

ii) Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τον άξονα $x'x$ είναι:

$$E = \int_{-2}^2 |f(x)| dx = \int_{-2}^0 f(x) dx - \int_0^2 f(x) dx =$$

$$= \int_{-2}^0 \frac{9\sqrt{3}}{16} (x^3 - 4x) dx - \int_0^2 \frac{9\sqrt{3}}{16} (x^3 - 4x) dx =$$

$$= \frac{9\sqrt{3}}{16} \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_{-2}^0 - \frac{9\sqrt{3}}{16} \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_0^2 =$$

$$= \frac{9\sqrt{3}}{16} \cdot (0 - 4 + 8) - \frac{9\sqrt{3}}{16} (4 - 8 - 0) =$$

$$= \frac{9\sqrt{3}}{16} \cdot 4 - \frac{9\sqrt{3}}{16} (-4) = \frac{8 \cdot 9\sqrt{3}}{16} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$