

**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ**  
**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ**  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ 2014**

**ΘΕΜΑ 1ο :**

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς της μορφής  $z = x + xi$ ,  $x \in \mathbb{R}^*$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{z^4 + z^8 + z^{12} + \dots + z^{4v}}{iz^2 + i^5z^6 + i^9z^{10} + \dots + i^{4v-3}z^{4v-2}} = \operatorname{Im}(z^2), \quad v \in \mathbb{N}^*, \quad x \in \mathbb{R}^* - \left\{ \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

β) Να βρείτε τους μιγαδικούς που έχουν την παραπάνω μορφή και επαληθεύουν την εξίσωση:

$$z^3 - z^2 + \bar{z} + i = 0$$

γ) Αν  $z_1, z_2$  οι λύσεις της προηγούμενης εξίσωσης, να αποδείξετε ότι:

i)  $z_1^4 = z_2^4 = -1$

ii)  $\frac{z_1^2 + z_1}{z_2} + \frac{z_2^2 + z_2}{z_1} = -2$

iii)  $z_1^{2014} + z_2^{2014} = -2i$

**ΛΥΣΗ**

α) Είναι:

$$i^5 = i^{4+1} = i, \quad i^9 = i^{4+2+1} = i, \quad \dots, \quad i^{4v-3} = i^{4(v-1)+1} = i \quad \text{και}$$

$$z^2 = (x + xi)^2 = x^2 + 2x^2i - x^2 = 2x^2i$$

οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} & \frac{z^4 + z^8 + z^{12} + \dots + z^{4v}}{iz^2 + i^5z^6 + i^9z^{10} + \dots + i^{4v-3}z^{4v-2}} = \\ & = \frac{z^2 \cdot (z^2 + z^6 + z^{10} + \dots + z^{4v-2})}{i \cdot (z^2 + z^6 + z^{10} + \dots + z^{4v-2})} = \\ & = \frac{z^2}{i} = \frac{2x^2i}{i} = 2x^2 = \operatorname{Im}(z^2) \end{aligned}$$

β) Είναι:

$$z^3 = z \cdot z^2 = (x + xi) \cdot 2x^2i = -2x^3 + 2x^3i$$

οπότε έχουμε:

$$z^3 - z^2 + \bar{z} + i = 0 \Leftrightarrow (-2x^3 + 2x^3i) - 2x^2i + (x - xi) + i = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-2x^3 + x) + (2x^3 - 2x^2 - x + 1)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x^3 + x = 0 \\ 2x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - x = 0 \\ (2x^3 - x) - 2x^2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - x = 0 \\ -2x^2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \cdot (2x^2 - 1) = 0 \\ 2x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Άρα οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \quad \text{και} \quad z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

γ) i) Είναι:

$$\bullet z_1^4 = (z_1^2)^2 = \left(\frac{1}{2}(1+i)^2\right)^2 = \frac{1}{4}(1+2i-1)^2 = \frac{1}{4} \cdot 4i^2 = -1 \quad (1) \quad \text{και}$$

$$\bullet z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = -z_1 \quad (2)$$

οπότε έχουμε:

$$z_2^4 = (-z_1)^4 = z_1^4 \stackrel{(1)}{=} -1$$

ii) Είναι:

$$\begin{aligned} \frac{z_1^2 + z_1}{z_2} + \frac{z_2^2 + z_2}{z_1} &= \frac{z_1^3 + z_1^2 + z_2^3 + z_2^2}{z_1 z_2} \stackrel{(2)}{=} \\ &= \frac{z_1^3 + z_1^2 + (-z_1)^3 + (-z_1)^2}{z_1(-z_1)} = \\ &= \frac{z_1^3 + z_1^2 - z_1^3 + z_1^2}{-z_1^2} = \frac{2z_1^2}{-z_1^2} = -2 \end{aligned}$$

iii) Είναι:

$$\begin{aligned} \bullet z_1^{2014} &= z_1^{4 \cdot 503 + 2} = (z_1^4)^{503} \cdot z_1^2 \stackrel{(1)}{=} (-1)^{503} \cdot z_1^2 = -z_1^2 = \\ &= -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)^2 = -\frac{1}{2}(1+2i-1) = -\frac{1}{2} \cdot 2i = -i \quad (3) \end{aligned}$$

$$\bullet z_2^{2014} \stackrel{(2)}{=} (-z_1)^{2014} = z_1^{2014} \stackrel{(3)}{=} -i$$

οπότε έχουμε:

$$z_1^{2014} + z_2^{2014} = (-i) + (-i) = -2i$$

**ΘΕΜΑ 2ο :**

α) Να λύσετε την εξίσωση  $4w^2 - 2w + 1 = 0$ ,  $w \in \mathbb{C}$

Θεωρούμε επιπλέον τους μιγαδικούς αριθμούς  $z_1, z_2$  οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z_1| = 1 \quad (1) \quad \text{και} \quad 4 \cdot \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = 2 \quad (2)$$

β) Να αποδείξετε ότι  $|z_2| = 2$

γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο που έχει κορυφές τις εικόνες των μιγαδικών αριθμών  $0, z_1$  και  $z_2$  είναι ορθογώνιο.

δ) Να υπολογίσετε τις οξείες γωνίες του παραπάνω τριγώνου.

**ΛΥΣΗ**

α) Η εξίσωση  $4w^2 - 2w + 1 = 0$  έχει διακρίνουσα  $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = -12 < 0$  και οι λύσεις της

$$\text{είναι: } w = \frac{1}{4} \pm i \frac{\sqrt{3}}{4}$$

β) Θέτουμε  $\frac{z_1}{z_2} = w$ . Επειδή  $|z_1| = 1$  θα είναι  $z_1 \neq 0$ , άρα  $w \neq 0$ , οπότε η σχέση (2) ισοδύναμα

γράφεται:

$$4w + \frac{1}{w} = 2 \Leftrightarrow 4w^2 - 2w + 1 = 0 \Leftrightarrow w = \frac{1}{4} \pm i \frac{\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{4} \pm i \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Άρα } \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \left| \frac{1}{4} \pm i \frac{\sqrt{3}}{4} \right| = \frac{1}{2}, \text{ επομένως } \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{1}{2} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} |z_2| = 2$$

γ) Αν  $O, A$  και  $B$  είναι οι εικόνες των  $0, z_1$  και  $z_2$ , τότε έχουμε:

$$(OA)^2 = |z_1|^2 = 1^2 = 1, \quad (OB)^2 = |z_2|^2 = 2^2 = 4$$

Επίσης είναι:

$$4z_1^2 + z_2^2 = 2z_1z_2 \Rightarrow (z_1 - z_2)^2 = -3z_1^2 \Rightarrow |z_1 - z_2|^2 = 3|z_1|^2 \Rightarrow |z_1 - z_2| = \sqrt{3}$$

Οπότε:

$$(AB) = \sqrt{3} \Rightarrow (AB)^2 = 3$$

Παρατηρούμε ότι:

$$(OB)^2 = (OA)^2 + (AB)^2,$$

οπότε το τρίγωνο  $OAB$  είναι ορθογώνιο.

δ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $OAB$  ( $\widehat{OAB} = 90^\circ$ ) είναι  $(OA) = \frac{(OB)}{2}$ , οπότε θα έχουμε

$$\widehat{OBA} = 30^\circ \text{ και } \widehat{AOB} = 60^\circ$$

**ΘΕΜΑ 3ο :**

α) Για δύο οποιουδήποτε μιγαδικούς αριθμούς  $w_1$  και  $w_2$  να αποδείξετε ότι ισχύει

$$|w_1 + w_2|^2 + |w_1 - w_2|^2 = 2|w_1|^2 + 2|w_2|^2$$

β) Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς  $z$ , οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση  $|z - 2i| = 1$

i) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $z$

ii) Αν  $z_1, z_2$  είναι δύο μιγαδικοί του προηγούμενου γεωμετρικού τόπου για τους οποίους

ισχύει  $|z_1 - z_2| = 1$ , να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης  $|z_1 + z_2 - 4i|$

**ΛΥΣΗ**

α) Είναι:

$$\begin{aligned} |w_1 + w_2|^2 + |w_1 - w_2|^2 &= (w_1 + w_2)(\overline{w_1 + w_2}) + (w_1 - w_2)(\overline{w_1 - w_2}) = \\ &= (w_1 + w_2)(\overline{w_1} + \overline{w_2}) + (w_1 - w_2)(\overline{w_1} - \overline{w_2}) = \\ &= w_1\overline{w_1} + w_1\overline{w_2} + \overline{w_1}w_2 + w_2\overline{w_2} + w_1\overline{w_1} - w_1\overline{w_2} - \overline{w_1}w_2 + w_2\overline{w_2} = \\ &= 2w_1\overline{w_1} + 2w_2\overline{w_2} = 2|w_1|^2 + 2|w_2|^2 \end{aligned}$$

β) i) Έστω  $z = x + yi$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$  με εικόνα στο επίπεδο το σημείο  $M(x, y)$

Είναι  $|z - 2i| = 1 \Leftrightarrow |z - (0 + 2i)| = 1 \Leftrightarrow (MK) = 1$ , όπου  $M(z)$  η εικόνα του  $z$  και  $K(0, 2)$

Παρατηρούμε ότι η εικόνα  $M$  του μιγαδικού αριθμού  $z$  απέχει από το σταθερό σημείο  $K(0, 2)$  σταθερή απόσταση 1

Οπότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $z$  είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο  $K(0, 2)$  και ακτίνα  $\rho = 1$ , που έχει εξίσωση  $|z - 2i| = 1$

ii) Επειδή οι μιγαδικοί  $z_1, z_2$  ικανοποιούν τη σχέση  $|z - 2i| = 1$ , θα ισχύει:

$$|z_1 - 2i| = 1 \quad \text{και} \quad |z_2 - 2i| = 1$$

Θέτοντας  $w_1 = z_1 - 2i$  και  $w_2 = z_2 - 2i$  στην ισότητα του (α) ερωτήματος διαδοχικά έχουμε:

$$|(z_1 - 2i) + (z_2 - 2i)|^2 + |(z_1 - 2i) - (z_2 - 2i)|^2 = 2|z_1 - 2i|^2 + 2|z_2 - 2i|^2 \Leftrightarrow$$

$$|z_1 + z_2 - 4i|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^2 \Leftrightarrow$$

$$|z_1 + z_2 - 4i|^2 + 1 = 4 \Leftrightarrow$$

$$|z_1 + z_2 - 4i| = \sqrt{3}$$

**ΘΕΜΑ 4ο :**

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί  $z, w$ , οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\bullet \quad (3z - 2i)^{2013} = (i\bar{z} - 6)^{2013} \quad (1) \quad \text{και}$$

$$\bullet \quad w = 1 + 2\bar{z}i \quad (2)$$

α) Να αποδείξετε ότι  $|z| = 2$

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός  $u = \left(z - \frac{4}{z}\right)^{2014}$  είναι πραγματικός.

γ) Να αποδείξετε ότι  $|u| \leq 2^{4028}$

δ) Αν  $w_1, w_2$  είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί, οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση (2), τότε να αποδείξετε ότι  $|w_1 - w_2| \leq 8$

**ΛΥΣΗ**

α) Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\begin{aligned} |(3z - 2i)^{2013}| &= |(i\bar{z} - 6)^{2013}| \Leftrightarrow |(3z - 2i)|^{2013} = |(i\bar{z} - 6)|^{2013} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |(3z - 2i)| = |(i\bar{z} - 6)| \Leftrightarrow |(3z - 2i)|^2 = |(i\bar{z} - 6)|^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (3z - 2i)(3\bar{z} + 2i) = (i\bar{z} - 6)(-iz - 6) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 9|z|^2 + 6iz - 6i\bar{z} + 4 = |z|^2 + 6iz - 6i\bar{z} + 36 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 8|z|^2 = 32 \Leftrightarrow |z|^2 = 4 \Leftrightarrow |z| = 2 \end{aligned}$$

β) Είναι:

$$|z| = 2 \Rightarrow |z|^2 = 4 \Rightarrow z \cdot \bar{z} = 4 \Rightarrow \frac{4}{z} = \bar{z} \quad (3)$$

Οπότε αν  $z = x + yi$  με  $x, y \in \mathbb{R}$ , τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} u &= \left(z - \frac{4}{z}\right)^{2014} \stackrel{(3)}{=} (z - \bar{z})^{2014} = (2yi)^{2014} = \\ &= (2y)^{2014} \cdot i^{2014} = (2y)^{2014} \cdot i^2 = -(2y)^{2014} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Επομένως  $u \in \mathbb{R}$

γ) Είναι:

$$|u| = \left| \left(z - \frac{4}{z}\right)^{2014} \right| \stackrel{(3)}{=} |(z - \bar{z})^{2014}| = |z - \bar{z}|^{2014} \leq (|z| + |\bar{z}|)^{2014} = 2^{4028}$$

Άρα:

$$|u| \leq 2^{4028}$$

- δ) Είναι  $w_1 = 1 + 2\bar{z}_1 i$  και  $w_2 = 1 + 2\bar{z}_2 i$ , όπου οι μιγαδικοί αριθμοί  $z_1, z_2$  ικανοποιούν τη σχέση (1), οπότε θα ισχύει ότι  $|z_1| = |z_2| = 2$ . Άρα οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών  $z_1, z_2$  ανήκουν στον κύκλο με κέντρο το σημείο  $O(0, 0)$  και ακτίνα  $\rho = 2$ , οπότε ισχύει  $|z_1 - z_2| \leq 4$   
Είναι:

$$\begin{aligned} |w_1 - w_2| &= |1 + 2\bar{z}_1 i - 1 - 2\bar{z}_2 i| = |2i(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)| = \\ &= 2|i| \cdot |\bar{z}_1 - \bar{z}_2| = 2|z_1 - z_2| = 2|z_1 - z_2| \leq 2 \cdot 4 = 8 \end{aligned}$$

### ΘΕΜΑ 5ο :

- α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών  $z$  που ικανοποιούν τη σχέση  $|z^2 - 2zi| + 2|z| = 2 + |\bar{z} + 2i|$  είναι ο κύκλος  $C : x^2 + y^2 = 1$
- β) Έστω  $z$  ένας μιγαδικός αριθμός του οποίου η εικόνα ανήκει στον κύκλο  $C$ . Να αποδείξετε ότι:
- i)  $|w + 3z| + |2w + 5z| \geq \frac{1}{2}$  για οποιοδήποτε μιγαδικό αριθμό  $w$
- ii)  $\sqrt{2} \leq |z - 1| + |z^2 + 1| \leq 4$
- γ) Έστω  $u, v$  δύο μιγαδικοί αριθμοί. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μιγαδικός αριθμός  $z_0$  με εικόνα στον κύκλο  $C$ , ώστε να ισχύει  $|z_0^2 + uz_0 + v| \geq 1$

### ΛΥΣΗ

- α) Είναι:

$$\begin{aligned} |z^2 - 2zi| + 2|z| &= 2 + |\bar{z} + 2i| \Leftrightarrow \\ |z| \cdot |z - 2i| + 2|z| &= 2 + |\overline{z - 2i}| \Leftrightarrow \\ |z| \cdot |z - 2i| - |z - 2i| + 2|z| - 2 &= 0 \Leftrightarrow \\ |z - 2i|(|z| - 1) + 2(|z| - 1) &= 0 \Leftrightarrow \\ (|z| - 1)(|z - 2i| + 2) &= 0 \Leftrightarrow |z| = 1 \quad (1), \end{aligned}$$

αφού  $|z - 2i| + 2 \neq 0$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $z$  είναι ο κύκλος  $C : x^2 + y^2 = 1$  που έχει κέντρο το σημείο  $O(0, 0)$  και ακτίνα  $\rho = 1$

- β) i) Για οποιοδήποτε μιγαδικό αριθμό  $w$  έχουμε:

$$\begin{aligned} |w + 3z| + |2w + 5z| &= |w + 3z| + 2\left|w + \frac{5}{2}z\right| \geq \\ &\geq |w + 3z| + \left|w + \frac{5}{2}z\right| \geq \left|(w + 3z) - \left(w + \frac{5}{2}z\right)\right| = \frac{1}{2}|z| = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Επομένως

$$|w + 3z| + |2w + 5z| \geq \frac{1}{2}$$

ii) Είναι:

$$|z-1|+|z^2+1|\leq|z|+1+|z|^2+1 \stackrel{(1)}{=} 4$$

οπότε απομένει να αποδείξουμε το αριστερό μέλος της ζητούμενης ανισοτικής σχέσης.

Ισχύει:

$$|z-1|+|z^2+1|\geq|z-1+z^2+1|=|z(z+1)|=|z|\cdot|z+1| \quad (2)$$

Επειδή  $|z|=1$  από τη σχέση (2) προκύπτει ότι  $|z-1|+|z^2+1|\geq|z+1| \quad (3)$

Είναι προφανές ότι  $|z-1|+|z^2+1|\geq|z-1| \quad (4)$

Αν  $z = x + yi$  με  $x, y \in [-1, 1]$  τότε έχουμε:

- $|z|=1 \Rightarrow |z|^2=1 \Rightarrow x^2+y^2=1 \quad (5)$

- $|z+1|=\sqrt{(x+1)^2+y^2}=\sqrt{x^2+y^2+2x+1} \stackrel{(5)}{=} \sqrt{1+2x+1}=\sqrt{2(1+x)}=\sqrt{2}\sqrt{1+x} \quad (6)$

- $|z-1|=\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{x^2+y^2-2x+1} \stackrel{(5)}{=} \sqrt{1-2x+1}=\sqrt{2(1-x)}=\sqrt{2}\sqrt{1-x} \quad (7)$

Από τις σχέσεις (3) και (6) προκύπτει ότι:

$$|z-1|+|z^2+1|\geq\sqrt{2}\sqrt{1+x} \quad (8)$$

Από τις σχέσεις (4) και (7) προκύπτει ότι :

$$|z-1|+|z^2+1|\geq\sqrt{2}\sqrt{1-x} \quad (9)$$

Αν  $x \in [0, 1]$  από τη σχέση (8) έχουμε:

$$|z-1|+|z^2+1|\geq\sqrt{2}$$

Αν  $x \in [-1, 0]$  από τη σχέση (9) έχουμε:

$$|z-1|+|z^2+1|\geq\sqrt{2}$$

Επομένως είναι:

$$\sqrt{2} \leq |z-1|+|z^2+1| \leq 4$$

γ) Έστω ότι για κάθε  $z \in \mathbb{C}$  με  $|z|=1$  ισχύει:

$$|z^2 + uz + v| < 1 \quad (10)$$

Αν στη σχέση (10) θέσουμε διαδοχικά  $z=1$  και  $z=-1$  έχουμε:

$$|1+u+v| < 1 \quad \text{και} \quad |1-u+v| < 1$$

οπότε

$$2 > |1+u+v| + |1-u+v| \geq |(1+u+v) + (1-u+v)| \Rightarrow$$

$$2 > |2+2v| \Rightarrow 2 > 2|1+v| \Rightarrow |v+1| < 1 \quad (11)$$

Αν στη σχέση (10) θέσουμε διαδοχικά  $z=i$  και  $z=-i$  έχουμε:

$$|-1+ui+v| < 1 \quad \text{και} \quad |-1-ui+v| < 1$$

οπότε

$$2 > |-1+ui+v| + |-1-ui+v| \geq |(-1+ui+v) + (-1-ui+v)| \Rightarrow$$

$$2 > |-2+2v| \Rightarrow 2 > 2|-1+v| \Rightarrow |v-1| < 1 \quad (12)$$

Από τις σχέσεις (11) και (12) συμπεραίνουμε ότι:

$$2 > |v+1| + |v-1| \geq |(v+1) - (v-1)| \Rightarrow 2 > 2$$

που είναι άτοπο.

Άρα υπάρχει  $z_0 \in \mathbb{C}$  με  $|z_0|=1$ , ώστε να ισχύει  $|z_0^2 + uz_0 + v| \geq 1$

**ΘΕΜΑ 6ο :**

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς  $z$  και  $w$  για τους οποίους ισχύει:

- $|z - 3 - 3i| = 2 \left| \left( \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \right)^{25} \right|$  και
- $2|\bar{w} - 3 + 3i| = |iz + 3 - 3i|$

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $z$ . Στη συνέχεια να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του  $\operatorname{Re}(z)$

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $w$

γ) Για τους μιγαδικούς αριθμούς  $z$  και  $w$  των ερωτημάτων (α) και (β) να αποδείξετε ότι:

$$1 \leq |z - w| \leq 3 \quad \text{και} \quad 6\sqrt{2} - 3 \leq |z + w| \leq 6\sqrt{2} + 3$$

δ) Αν  $z_1, z_2$  είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς  $z$ , τότε να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$k = (z_1 - z_2) \cdot \left( \frac{1}{z_1 - 3 - 3i} - \frac{1}{z_2 - 3 - 3i} \right)$$

είναι πραγματικός και ισχύει  $0 \leq k \leq 4$

**ΛΥΣΗ**

α) Είναι:

$$\left| \left( \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \right)^{25} \right| = \left| \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \right|^{25} = \left| \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right|^{25} = \left( \sqrt{\left( \frac{1}{2} \right)^2 + \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2} \right)^{25} = 1^{25} = 1$$

οπότε

$$|z - 3 - 3i| = 2 \left| \left( \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \right)^{25} \right| \Leftrightarrow |z - (3 + 3i)| = 2$$

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $z$  είναι ο κύκλος με κέντρο  $K(3, 3)$  και ακτίνα  $\rho = 2$

Για τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς  $z$  ισχύει  $|\operatorname{Re}(z) - x_k| \leq \rho$ , όπου  $x_k = 3$  η τετμημένη του κέντρου του κύκλου  $(K, \rho)$  και  $\rho = 2$

Είναι:

$$|\operatorname{Re}(z) - x_k| \leq \rho \Leftrightarrow x_k - \rho \leq \operatorname{Re}(z) \leq x_k + \rho \Leftrightarrow$$

$$3 - 2 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 3 + 2 \Leftrightarrow 1 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 5$$

Άρα η ελάχιστη τιμή του  $\operatorname{Re}(z)$  είναι το 1 και προκύπτει αν  $z = 1 + 3i$ , ενώ η μέγιστη τιμή του είναι το 5 και προκύπτει αν  $z = 5 + 3i$

**Σημείωση:**

Είναι:

$$|z - (3 + 3i)| = 2 \Leftrightarrow \stackrel{z=x+yi}{(x-3)^2 + (y-3)^2} = 4$$

οπότε

$$(x-3)^2 \leq 4 \Leftrightarrow |x-3| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x-3 \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 5$$

Άρα η ελάχιστη τιμή του  $\operatorname{Re}(z)$  είναι το 1 και προκύπτει αν  $z = 1 + 3i$ , ενώ η μέγιστη τιμή του είναι το 5 και προκύπτει αν  $z = 5 + 3i$



β) Είναι:

$$2|\bar{w} - 3 + 3i| = |iz + 3 - 3i| \Leftrightarrow 2|\overline{(w - 3 - 3i)}| = |i(z - 3 - 3i)| \Leftrightarrow$$

$$2|w - 3 - 3i| = |i| \cdot |z - 3 - 3i| \stackrel{\omega)}{\Leftrightarrow} 2|w - 3 - 3i| = 2 \Leftrightarrow |w - 3 - 3i| = 1 \Leftrightarrow |w - (3 + 3i)| = 1$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $w$  είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο  $K(3, 3)$  και ακτίνα  $\rho_1 = 1$

γ) 1<sup>ος</sup> τρόπος:

Για τους μιγαδικούς αριθμούς  $z$  και  $w$  των ερωτημάτων (α) και (β) έχουμε:

$$|z - w| = |(z - (3 + 3i)) - (w - (3 + 3i))| = |u - v|$$

όπου

$$u = z - (3 + 3i) \text{ και } v = w - (3 + 3i) \text{ με } |u| = 2 \text{ και } |v| = 1$$

Ισχύει:

$$|z - w| = |u - v| \leq |u| + |v| = 2 + 1 = 3$$

και

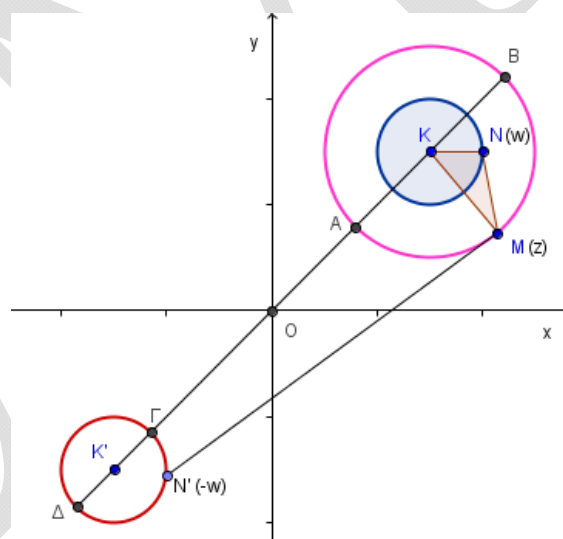
$$|z - w| = |u - v| \geq ||u| - |v|| = |2 - 1| = 1$$

Άρα

$$1 \leq |z - w| \leq 3$$

2<sup>ος</sup> τρόπος: Γεωμετρικά (Υπόδειξη)

Μπορούμε να αποδείξουμε την παραπάνω ανισότητα και **γεωμετρικά** μέσω της τριγωνικής ανισότητας στο τρίγωνο  $KMN$  του παρακάτω σχήματος.



1<sup>ος</sup> τρόπος:

Είναι:

$$|z + w| = |(z - (3 + 3i)) + (w - (3 + 3i)) + 6(1 + i)| = |u + v + 6(1 + i)|$$

Ισχύει:

$$|z + w| = |u + v + 6(1 + i)| \leq |u| + |v| + |6(1 + i)| = 2 + 1 + 6\sqrt{2} = 6\sqrt{2} + 3$$

και

$$|z + w| = |(u + v) + 6(1 + i)| \geq ||6(1 + i)| - |u + v|| \geq |6\sqrt{2} - 3| = 6\sqrt{2} - 3$$

Άρα

$$6\sqrt{2} - 3 \leq |z + w| \leq 6\sqrt{2} + 3$$

**2<sup>ος</sup> τρόπος : Γεωμετρικά (Υπόδειξη)**

Είναι:

$$|z + w| = |z - (-w)| = (MN') \leq (BD) = 6\sqrt{2} + 3$$

και

$$|z + w| = |z - (-w)| = (MN') \geq (AG) = 6\sqrt{2} - 3, \text{ διότι ...}$$

Άρα ...

**δ)** Θέτουμε  $u = z - (3 + 3i)$ , τότε έχουμε:

$$|u| = |z - (3 + 3i)| = 2 \quad (1)$$

και

$$|u| = 2 \Leftrightarrow |u|^2 = 4 \Leftrightarrow u \cdot \bar{u} = 4 \Leftrightarrow \bar{u} = \frac{4}{u} \quad (2)$$

Αν  $z_1, z_2$  είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς  $z$ , τότε:

$$\begin{aligned} k &= (z_1 - z_2) \left( \frac{1}{z_1 - 3 - 3i} - \frac{1}{z_2 - 3 - 3i} \right) = \\ &= ((z_1 - 3 - 3i) - (z_2 - 3 - 3i)) \cdot \left( \frac{1}{z_1 - 3 - 3i} - \frac{1}{z_2 - 3 - 3i} \right) = \\ &= (u_1 - u_2) \left( \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \right) = \frac{1}{4} (u_1 - u_2) \left( \frac{4}{u_1} - \frac{4}{u_2} \right) \stackrel{(2)}{=} \\ &= \frac{1}{4} (u_1 - u_2) (\bar{u}_1 - \bar{u}_2) = \frac{1}{4} (u_1 - u_2) (\overline{u_1 - u_2}) = \frac{1}{4} |u_1 - u_2|^2 \end{aligned}$$

Άρα ο αριθμός  $k$  είναι πραγματικός και ισχύει:

- $k = \frac{1}{4} |u_1 - u_2|^2 \geq 0$  και
- $k = \frac{1}{4} |u_1 - u_2|^2 \leq \frac{1}{4} (|u_1| + |u_2|)^2 \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{4} (2 + 2)^2 = 4$

Δηλαδή  $0 \leq k \leq 4$ **ΘΕΜΑ 7ο :**Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί  $z$ , οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση:

$$|iz + 8| = 2|2iz + 1|$$

- α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών  $z$  είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο  $O(0, 0)$  και ακτίνα  $\rho = 2$
- β) Αν οι εικόνες των μιγαδικών  $z_1, z_2$  είναι σημεία του προηγούμενου γεωμετρικού τόπου και ισχύει  $|z_1 + xz_2| > \sqrt{3}$  για κάθε  $x \in \mathbf{R}$ , να αποδείξετε ότι  $|\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)| < 2$
- γ) Έστω πραγματικός αριθμός  $a$  με  $a \in (-1, 1)$ . Αν  $z$  μιγαδικός αριθμός, για τον οποίο ισχύει:

$$z^4 + 2az^3 + 8az + 16 = 0 \quad (1)$$

να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού  $z$ :

- Ανήκει στο γεωμετρικό τόπο του (α) ερωτήματος
- Δεν ανήκει στους άξονες  $x'x$  και  $y'y$

## ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$|iz+8|=2|2iz+1| \Leftrightarrow |iz+8|^2=4|2iz+1|^2 \Leftrightarrow$$

$$(iz+8)(\overline{iz+8})=4(2iz+1)(\overline{2iz+1}) \Leftrightarrow$$

$$(iz+8)(-i\bar{z}+8)=4(2iz+1)(-2i\bar{z}+1) \Leftrightarrow$$

$$|z|^2+8iz-8i\bar{z}+64=16|z|^2+8iz-8i\bar{z}+4 \Leftrightarrow$$

$$15|z|^2=60 \Leftrightarrow |z|^2=4 \Leftrightarrow |z|=2$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $z$  είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο  $O(0,0)$  και ακτίνα  $\rho=2$

β) Είναι:

$$|z_1|=2 \quad \text{και} \quad |z_2|=2$$

οπότε έχουμε:

$$|z_1+xz_2|>\sqrt{3} \Leftrightarrow |z_1+xz_2|^2>3 \Leftrightarrow (z_1+xz_2) \cdot (\overline{z_1+xz_2})>3 \Leftrightarrow$$

$$(z_1+xz_2) \cdot (\bar{z}_1+x\bar{z}_2)>3 \Leftrightarrow |z_1|^2+xz_1\bar{z}_2+x\bar{z}_1z_2+x^2|z_2|^2>3 \Leftrightarrow$$

$$4x^2+(z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2) \cdot x+1>0 \Leftrightarrow 4x^2+(z_1\bar{z}_2+\overline{z_1\bar{z}_2}) \cdot x+1>0 \Leftrightarrow$$

$$4x^2+2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) \cdot x+1>0, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Επομένως για τη διακρίνουσα του τριωνύμου  $4x^2+2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) \cdot x+1$  ισχύει:

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow 4(\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2))^2-16 < 0 \Leftrightarrow (\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2))^2 < 4 \Leftrightarrow |\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)| < 2$$

γ) i) 1<sup>ος</sup> τρόπος:

Αν  $z$  μιγαδικός αριθμός, για τον οποίο ισχύει η σχέση (1), τότε έχουμε:

$$z^4+2\alpha z^3+8\alpha z+16=0 \Leftrightarrow z^3(z+2\alpha)=-8(\alpha z+2)$$

Άρα

$$|z|^3 \cdot |z+2\alpha|=8|\alpha z+2| \quad (2)$$

Αν υποθέσουμε ότι  $|z|>2$ , τότε  $|z|^3>8$  και από τη σχέση (2) έχουμε:

$$|z+2\alpha|<|\alpha z+2| \Leftrightarrow |z+2\alpha|^2<|\alpha z+2|^2 \Leftrightarrow$$

$$(z+2\alpha)(\overline{z+2\alpha})<( \alpha z+2)(\overline{\alpha z+2}) \Leftrightarrow$$

$$(z+2\alpha)(\bar{z}+2\bar{\alpha})<( \alpha z+2)(\alpha\bar{z}+2) \Leftrightarrow$$

$$|z|^2+2\alpha z+2\alpha\bar{z}+4\alpha^2<\alpha^2|z|^2+2\alpha z+2\alpha\bar{z}+4 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha^2-1)|z|^2-4(\alpha^2-1)>0 \Leftrightarrow (\alpha^2-1)(|z|^2-4)>0 \quad (3)$$

Επειδή  $\alpha \in (-1,1)$  το  $\alpha^2-1<0$  και από τη σχέση (3) προκύπτει ότι:

$$|z|^2-4<0 \Rightarrow |z|^2<4 \Rightarrow |z|<2, \quad \text{που είναι άτοπο, αφού } |z|>2$$

Αν υποθέσουμε ότι  $|z| < 2$ , τότε ομοίως προκύπτει  $|z| > 2$ , που είναι επίσης άτοπο.

Επομένως υποχρεωτικά ισχύει ότι  $|z|=2$ , άρα οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών  $z$ , για τους οποίους ισχύει η σχέση (1) ανήκουν στο κύκλο  $C: x^2 + y^2 = 4$ , δηλαδή στο γεωμετρικό τόπο του (α) ερωτήματος.

**2<sup>ος</sup> τρόπος:**

Αν υποθέσουμε ότι  $z = 0$ , τότε από την (1) έχουμε  $16 = 0$ , που είναι άτοπο.

Για  $z \neq 0$  έχουμε:

$$z^4 + 2az^3 + 8az + 16 = 0 \stackrel{\neq z^2 \neq 0}{\Leftrightarrow} z^2 + 2az + \frac{8a}{z} + \frac{16}{z^2} = 0 \Leftrightarrow \left(z^2 + \frac{16}{z^2}\right) + 2a\left(z + \frac{4}{z}\right) = 0 \quad (4)$$

Αν θέσουμε  $z + \frac{4}{z} = u$  (5), τότε έχουμε:

$$\left(z + \frac{4}{z}\right)^2 = u^2 \Rightarrow z^2 + 2z \cdot \frac{4}{z} + \frac{16}{z^2} = u^2 \Rightarrow z^2 + \frac{16}{z^2} = u^2 - 8,$$

οπότε η (4) ισοδύναμα γράφεται:

$$(u^2 - 8) + 2au = 0 \Leftrightarrow u^2 + 2au - 8 = 0 \quad (6)$$

Είναι:

$$\Delta = 4a^2 + 32 = 4(a^2 + 8) > 0$$

Οπότε οι ρίζες της εξίσωσης (6) είναι:

$$u = \frac{-2a \pm 2\sqrt{a^2 + 8}}{2} = -a \pm \sqrt{a^2 + 8} \quad (7)$$

Επομένως η εξίσωση (5) ισοδύναμα γράφεται:

$$z^2 - uz + 4 = 0 \stackrel{(7)}{\Leftrightarrow} z^2 + \left(\alpha \pm \sqrt{a^2 + 8}\right)z + 4 = 0 \quad (8)$$

Είναι:

$$\Delta = \left(\alpha \pm \sqrt{a^2 + 8}\right)^2 - 16 = \alpha^2 + a^2 + 8 \pm 2\alpha\sqrt{a^2 + 8} - 16 = 2\left(\alpha^2 - 4 \pm \alpha\sqrt{a^2 + 8}\right)$$

Από τη σχέση  $-1 < \alpha < 1$  έχουμε:

- $0 \leq \alpha^2 < 1 \Rightarrow -4 \leq \alpha^2 - 4 < -3$
- $-\sqrt{a^2 + 8} < \alpha\sqrt{a^2 + 8} < \sqrt{a^2 + 8} \Leftrightarrow -\sqrt{a^2 + 8} < -\alpha\sqrt{a^2 + 8} < \sqrt{a^2 + 8}$

οπότε

$$\alpha^2 - 4 + \alpha\sqrt{a^2 + 8} < -3 + \sqrt{a^2 + 8} < -3 + 3 = 0$$

και

$$\alpha^2 - 4 - \alpha\sqrt{a^2 + 8} < -3 + \sqrt{a^2 + 8} < -3 + 3 = 0$$

Άρα σε κάθε περίπτωση είναι  $\Delta < 0$

Οπότε οι ρίζες  $z_1, z_2$  της εξίσωσης (8) είναι μιγαδικοί συζυγείς με  $z_1 \cdot z_2 = 4$

Επομένως έχουμε:

$$z_1 \cdot z_2 = 4 \Leftrightarrow z_1 \cdot \bar{z}_1 = 4 \Leftrightarrow |z_1|^2 = 4 \Leftrightarrow |z_1| = 2$$

Άρα για κάθε ρίζα  $z$  της εξίσωσης ισχύει ότι  $|z|=2$ , οπότε οι εικόνες όλων των μιγαδικών  $z$ , για τους οποίους ισχύει η σχέση (1) ανήκουν στο κύκλο  $C: x^2 + y^2 = 4$ , δηλαδή στο γεωμετρικό τόπο του (α) ερωτήματος.

ii) • Αν  $y = 0$ , τότε  $z = x + 0 \cdot i = x \in \mathbb{R}$  (πραγματικός αριθμός) και επειδή  $|z| = 2 \Rightarrow z = \pm 2$

Για  $z = 2$  έχω:

$$2^4 + 2\alpha \cdot 2^3 + 8\alpha \cdot 2 + 16 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -1, \text{ που είναι άτοπο, αφού } \alpha \in (-1, 1)$$

Για  $z = -2$  έχω:

$$(-2)^4 + 2\alpha \cdot (-2)^3 + 8\alpha \cdot (-2) + 16 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1, \text{ που είναι άτοπο, αφού } \alpha \in (-1, 1)$$

Άρα  $y \neq 0$

• Αν  $x = 0$ , τότε  $z = 0 + yi = yi \in I$  (φανταστικός αριθμός) και επειδή  $|z| = 2 \Rightarrow z = \pm 2i$

Για  $z = 2i$  έχω:

$$(2i)^4 + 2\alpha \cdot (2i)^3 + 8\alpha \cdot 2i + 16 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2^4 i^4 + 2\alpha \cdot 2^3 i^3 + 8\alpha \cdot 2i + 16 = 0 \Leftrightarrow$$

$$16 - 16\alpha i + 16\alpha i + 16 = 0 \Leftrightarrow 32 = 0, \text{ που είναι άτοπο.}$$

Για  $z = -2i$  έχω:

$$(-2i)^4 + 2\alpha \cdot (-2i)^3 + 8\alpha \cdot (-2i) + 16 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2^4 i^4 + 2\alpha \cdot (-2)^3 i^3 - 8\alpha \cdot 2i + 16 = 0 \Leftrightarrow$$

$$16 + 16\alpha i - 16\alpha i + 16 = 0 \Leftrightarrow 32 = 0, \text{ που είναι άτοπο.}$$

Άρα  $x \neq 0$

Επομένως οι μιγαδικοί που ικανοποιούν τη σχέση (1) είναι της μορφής  $x + yi$  με  $xy \neq 0$

### ΘΕΜΑ 8ο :

Έστω συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο διάστημα  $[1, 2]$  με  $f(1) = -1$  και  $f(2) = 1$ . Θεωρούμε επίσης τους μιγαδικούς αριθμούς  $z$ , οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση  $|z - 2i| = |z|$ . Να αποδείξετε ότι:

α) Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $z$  στο επίπεδο είναι η ευθεία  $y = 1$

β) Υπάρχει ακριβώς μια τιμή του  $\operatorname{Re}(z)$  τέτοια, ώστε ο αριθμός  $w = z^2 - \frac{1}{z}$  να είναι πραγματικός.

γ)  $-1 \leq f(|z|^2) \leq 1$ , αν  $\operatorname{Re}(z) \in [0, 1]$

### ΛΥΣΗ

α) Έστω  $z = x + yi$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$  με εικόνα στο επίπεδο το σημείο  $M(x, y)$ .

Είναι:

$$|z - 2i| = |z| \Leftrightarrow |x + yi - 2i| = |x + yi| \Leftrightarrow |x + (y - 2)i| = |x + yi| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y - 2)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow x^2 + (y - 2)^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4y + 4 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow -4y + 4 = 0 \Leftrightarrow 4y = 4 \Leftrightarrow y = 1$$

β) Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών  $z$  είναι σημεία της ευθείας  $y=1$ , άρα είναι  $z = x + i$ ,  $x \in \mathbb{R}$   
Είναι:

$$\begin{aligned} w &= z^2 - \frac{1}{z} = (x+i)^2 - \frac{1}{x+i} = (x+i)^2 - \frac{x-i}{(x+i)(x-i)} = \\ &= x^2 + 2xi - 1 - \frac{x-i}{x^2+1} = \left( x^2 - 1 - \frac{x}{x^2+1} \right) + \left( 2x + \frac{1}{x^2+1} \right) i \end{aligned}$$

Είναι:

$$w \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2x + \frac{1}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 2x + 1 = 0 \quad (1)$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση (1) έχει μια ακριβώς ρίζα ως προς  $x$  στο  $\mathbb{R}$ , αφού  $x = \operatorname{Re}(z)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = 2x^3 + 2x + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$

Η συνάρτηση  $g$  είναι παραγωγίσιμη με  $g'(x) = 6x^2 + 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι  $g'(x) > 0$ , οπότε η συνάρτηση  $g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$

Έχουμε:

- $g$  συνεχής και γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 + 2x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty$  και
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 + 2x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = +\infty$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $g$  είναι  $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ , οπότε υπάρχει ένα  $\xi \in \mathbb{R}$  τέτοιο, ώστε  $g(\xi) = 0$  και μάλιστα είναι μοναδικό, αφού η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Έχουμε  $|z|^2 = x^2 + 1$ , οπότε αρκεί να δείξουμε ότι  $-1 \leq f(x^2+1) \leq 1$

Η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως μονότονη στο  $[1, 2]$  με  $f(1) < f(2)$ , επομένως η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[1, 2]$

Από υπόθεση γνωρίζουμε ότι  $\operatorname{Re}(z) \in [0, 1]$ , οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 1 &\Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 1 \Rightarrow 1 \leq x^2 + 1 \leq 2 \xrightarrow{f \nearrow} \\ f(1) \leq f(x^2 + 1) &\leq f(2) \Rightarrow -1 \leq f(x^2 + 1) \leq 1 \end{aligned}$$

### ΘΕΜΑ 9ο :

I) Να αποδείξετε ότι για όλους τους μιγαδικούς αριθμούς  $z$ ,  $w$  ισχύει η σχέση:

$$|z - w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2\operatorname{Re}(z\bar{w})$$

II) Δίνονται:

- η γνησίως μονότονη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  και
- οι μιγαδικοί αριθμοί  $z = 3 + f(2)i$  και  $w = f^{-1}(2) + 3i$

Αν ισχύει  $|z|^2 + |w|^2 = 2\operatorname{Re}(z\bar{w})$ , τότε να αποδείξετε ότι:

α)  $z = w$

β) Οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  με  $g(x) = f(2x - f(x)) - x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , είναι γνησίως φθίνουσες.

γ) Ισχύει η ισοδυναμία:

$$f^{-1}(x) = 2x - f(x) \Leftrightarrow g(x) = 0, x \in \mathbb{R}$$

δ) Αν επιπλέον η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , να αποδείξετε ότι υπάρχουν  $\xi_1 \in (1, 4)$  και  $\xi_2 \in (2, 3)$  τέτοια, ώστε  $3f'(\xi_1) = g'(\xi_2) + 1$

## ΛΥΣΗ

I) Είναι:

$$\begin{aligned} |z-w|^2 &= (z-w)(\overline{z-w}) = (z-w)(\bar{z}-\bar{w}) = z\bar{z} - z\bar{w} - \bar{z}w + w\bar{w} = \\ &= |z|^2 + |w|^2 - (z\bar{w} + \bar{z}w) = |z|^2 + |w|^2 - (z\bar{w} + \overline{z\bar{w}}) = |z|^2 + |w|^2 - 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) \quad (1) \end{aligned}$$

II) α) Είναι:

$$\begin{aligned} |z|^2 + |w|^2 = 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) &\Leftrightarrow |z|^2 + |w|^2 - 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |z-w|^2 = 0 \Leftrightarrow |z-w| = 0 \Leftrightarrow z-w = 0 \Leftrightarrow z = w \end{aligned} \quad (1)$$

β) Είναι:

$$z = w \Leftrightarrow 3 + f(2)i = f^{-1}(2) + 3i \Leftrightarrow \begin{cases} f(2) = 3 \\ f^{-1}(2) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(2) = 3 \\ f(3) = 2 \end{cases}$$

- Η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως μονότονη, επομένως ή θα είναι γνησίως αύξουσα ή θα είναι γνησίως φθίνουσα.

Έστω ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα, τότε:

$$2 < 3 \xrightarrow{f \uparrow} f(2) < f(3) \Rightarrow 3 < 2$$

που είναι άτοπο. Επομένως η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα.

- Για τυχαία  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $x_1 < x_2 \xrightarrow{f \downarrow} f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow -f(x_1) < -f(x_2)$

Είναι:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_1 < x_2 \\ -f(x_1) < -f(x_2) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 < 2x_2 \\ -f(x_1) < -f(x_2) \end{cases} \xrightarrow{(+)} 2x_1 - f(x_1) < 2x_2 - f(x_2) \xrightarrow{f \downarrow} \\ &\Rightarrow f(2x_1 - f(x_1)) > f(2x_2 - f(x_2)) \end{aligned}$$

Είναι:

$$\begin{cases} f(2x_1 - f(x_1)) > f(2x_2 - f(x_2)) \\ -x_1 > -x_2 \end{cases} \xrightarrow{(+)} f(2x_1 - f(x_1)) - x_1 > f(2x_2 - f(x_2)) - x_2 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$$

Επομένως η συνάρτηση  $g$  είναι γνησίως φθίνουσα.

γ) Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  έχουμε:

$$f^{-1}(x) = 2x - f(x) \Leftrightarrow f(2x - f(x)) = x \Leftrightarrow f(2x - f(x)) - x = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$$

δ) Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , επομένως ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα  $[1, 4]$ , οπότε θα υπάρχει  $\xi_1 \in (1, 4)$  τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} \Rightarrow f'(\xi_1) = \frac{f(4) - f(1)}{3} \Rightarrow 3f'(\xi_1) = f(4) - f(1) \quad (2)$$

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι:

$$g(x) = f(2x - f(x)) - x$$

Η συνάρτηση  $2x - f(x)$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , ως διαφορά παραγωγισίμων συναρτήσεων, οπότε η συνάρτηση  $f(2x - f(x))$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων και η συνάρτηση  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , ως διαφορά παραγωγισίμων συναρτήσεων.

Επομένως η συνάρτηση  $g$  ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα  $[2, 3]$ , οπότε θα υπάρχει  $\xi_2 \in (2, 3)$  τέτοιο, ώστε

$$g'(\xi_2) = \frac{g(3) - g(2)}{3 - 2} \Rightarrow g'(\xi_2) = g(3) - g(2) \quad (3)$$

$$\text{Για } x=2 \text{ είναι } g(2) = f(2 \cdot 2 - f(2)) - 2 = f(4 - 3) - 2 = f(1) - 2, \text{ οπότε } f(1) - g(2) = 2 \quad (4)$$

$$\text{Για } x=3 \text{ είναι } g(3) = f(2 \cdot 3 - f(3)) - 3 = f(6 - 2) - 3 = f(4) - 3, \text{ οπότε } f(4) - g(3) = 3 \quad (5)$$

Αν αφαιρέσουμε κατά μέλη τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε:

$$3f'(\xi_1) - g'(\xi_2) = (f(4) - f(1)) - (g(3) - g(2)) \Rightarrow$$

$$3f'(\xi_1) - g'(\xi_2) = (f(4) - g(3)) - (f(1) - g(2)) \stackrel{(4),(5)}{\Rightarrow}$$

$$3f'(\xi_1) - g'(\xi_2) = 3 - 2 \Rightarrow 3f'(\xi_1) = g'(\xi_2) + 1$$

### ΘΕΜΑ 10ο :

α) Να λύσετε την εξίσωση  $z^2 - 6\sigma\upsilon\nu\theta \cdot z + 5\sigma\upsilon\nu^2\theta + 4 = 0$ , όπου  $\theta \in \mathbb{R}$

β) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των ριζών  $z_1, z_2$  της εξίσωσης κινούνται πάνω στην έλλειψη

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \text{ για τις διάφορες τιμές του } \theta \in \mathbb{R}$$

γ) Για  $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  να βρείτε τη μέγιστη τιμή του  $|z_1 - z_2|$

δ) Αν  $\theta = \frac{\pi}{2}$  και  $z_1$  η ρίζα της εξίσωσης με  $\text{Im}(z_1) > 0$ , να βρείτε τιμές του  $v \in \mathbb{N}^*$ , ώστε  $z_1^v \in \mathbb{R}$

ε) Αν  $A(2, 3)$  και  $C$  το τμήμα της έλλειψης που ορίζεται από τα σημεία  $(x, y)$  με  $x \in [-1, 2]$  και  $y > 0$ , να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της  $C$ , που απέχει από το  $A$  ελάχιστη απόσταση και ένα τουλάχιστον σημείο της  $C$  που απέχει από το  $A$  μέγιστη απόσταση



## ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$$\Delta = (-6\sigma\upsilon\nu\theta)^2 - 4(5\sigma\upsilon\nu^2\theta + 4) = 36\sigma\upsilon\nu^2\theta - 20\sigma\upsilon\nu^2\theta - 16 = -16(1 - \sigma\upsilon\nu^2\theta) = -16\eta\mu^2\theta$$

Άρα οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$z_{1,2} = \frac{6\sigma\upsilon\nu\theta \pm i4\eta\mu\theta}{2} = 3\sigma\upsilon\nu\theta \pm 2\eta\mu\theta i$$

β) Αν  $z_{1,2} = x + yi$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ , τότε:

$$\begin{cases} x = 3\sigma\upsilon\nu\theta \\ y = \pm 2\eta\mu\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} = \sigma\upsilon\nu\theta \\ \pm 2 = \eta\mu\theta \end{cases} \quad (1)$$

Είναι:

$$\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta = 1 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Επομένως οι εικόνες των ριζών  $z_1, z_2$  της εξίσωσης κινούνται πάνω στην έλλειψη  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ , για τις διάφορες τιμές του  $\theta \in \mathbb{R}$

γ) Έχουμε:

$$|z_1 - z_2| = |4i\eta\mu\theta| = 4\eta\mu\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

Είναι:

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 \leq \eta\mu\theta \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 0 \leq 4\eta\mu\theta \leq 2\sqrt{2}$$

Άρα

$$|z_1 - z_2| \leq 2\sqrt{2}, \quad \text{οπότε η μέγιστη τιμή του } |z_1 - z_2| \text{ είναι } 2\sqrt{2}$$

δ) Για  $\theta = \frac{\pi}{2}$  έχουμε  $z_1 = 2i$ , άρα  $z_1^v = 2^v i^v$

Για  $v = 4\kappa$ ,  $\kappa \in \mathbb{N}^*$  έχουμε  $z_1^v = 2^v \in \mathbb{R}$

Για  $v = 4\kappa + 1$ ,  $\kappa \in \mathbb{N}^*$  έχουμε  $z_1^v = 2^v i \notin \mathbb{R}$

Για  $v = 4\kappa + 2$ ,  $\kappa \in \mathbb{N}^*$  έχουμε  $z_1^v = -2^v \in \mathbb{R}$

Για  $v = 4\kappa + 3$ ,  $\kappa \in \mathbb{N}^*$  έχουμε  $z_1^v = -2^v i \notin \mathbb{R}$

Άρα  $v = 2\mu$ ,  $\mu \in \mathbb{N}^*$

ε) Έχουμε:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \Leftrightarrow 4x^2 + 9y^2 = 36 \Leftrightarrow y^2 = \frac{36 - 4x^2}{9} \Leftrightarrow y^2 = \frac{4(9 - x^2)}{9} \stackrel{y > 0}{\Leftrightarrow} y = \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}$$

Αν  $M(x, y)$  σημείο του  $C$ , τότε:

$$d(M, A) = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + \left(\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2} - 3\right)^2}$$

Η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{(x-2)^2 + \left(\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2} - 3\right)^2}$  είναι συνεχής στο  $[-1, 2]$  ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων, άρα από το Θεώρημα Μέγιστης – Ελάχιστης Τιμής θα υπάρχουν  $x_1, x_2 \in [-1, 2]$  τέτοια, ώστε:

$$m = f(x_1) \text{ και } M = f(x_2), \text{ με } m \leq f(x) \leq M$$

Άρα υπάρχουν σημεία του  $C$ , που απέχουν ελάχιστη και μέγιστη απόσταση από το σημείο  $A$ .

### ΘΕΜΑ 11ο :

Δίνονται οι μιγαδικοί  $z$ ,  $w$  και  $u$ , οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\bullet \quad |z-1| = \operatorname{Re}(z) + 1 \quad (1)$$

$$\bullet \quad |w-2|^2 - |w-2i|^2 = 8 \quad (2)$$

$$\bullet \quad w \cdot u = 2 \quad (3)$$

- α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών  $z$  είναι η παραβολή με εξίσωση  $y^2 = 4x$
- β) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών  $w$  είναι η ευθεία ( $\varepsilon$ ) με εξίσωση  $x - y + 2 = 0$
- γ) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών  $u$  είναι ο κύκλος με κέντρο  $K\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$  και ακτίνα  $\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , με εξαίρεση το σημείο του  $O(0,0)$
- δ) Να βρείτε σημείο της παραβολής, το οποίο απέχει ελάχιστη απόσταση από την ευθεία ( $\varepsilon$ )
- ε) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός μιγαδικός  $z$  με  $z = u$  και  $\operatorname{Im}(z) < 0$

### ΛΥΣΗ

α) Θέτουμε  $z = x + yi$  με  $x, y \in \mathbb{R}$  και από τη σχέση (1) ισοδύναμα έχουμε:

$$|x + yi - 1| = x + 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = x + 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = (x+1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow y^2 = 4x, \quad x \geq 0$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών  $z$  είναι η παραβολή με εξίσωση  $y^2 = 4x$

β) Θέτουμε  $w = \alpha + \beta i$  με  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  και από τη σχέση (2) ισοδύναμα έχουμε:

$$|\alpha + \beta i - 2|^2 - |\alpha + \beta i - 2i|^2 = 8 \Leftrightarrow (\alpha - 2)^2 + \beta^2 - (\alpha^2 + (\beta - 2)^2) = 8 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 - 4\alpha + 4 + \beta^2 - \alpha^2 - \beta^2 + 4\beta - 4 = 8 \Leftrightarrow -4\alpha + 4\beta - 8 = 0 \Leftrightarrow \alpha - \beta + 2 = 0$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών  $w$  είναι η ευθεία με εξίσωση  $x - y + 2 = 0$

γ) Θέτουμε  $u = x + yi$  με  $x, y \in \mathbb{R}$  και από τη σχέση (3) ισοδύναμα έχουμε:

$$w = \frac{2}{u} \Leftrightarrow \alpha + \beta i = \frac{2}{x + yi} \Leftrightarrow \alpha + \beta i = \frac{2(x - yi)}{x^2 + y^2} \Leftrightarrow \left( \alpha = \frac{2x}{x^2 + y^2} \text{ και } \beta = -\frac{2y}{x^2 + y^2} \right)$$

Όμως  $\alpha - \beta + 2 = 0$ , άρα έχουμε:

$$\frac{2x}{x^2 + y^2} + \frac{2y}{x^2 + y^2} + 2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2x + 2y = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 + x + y = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

Για  $x = y = 0$  επαληθεύεται η εξίσωση, όμως τότε  $u = 0$ , άτοπο. Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών  $u$  είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο  $K\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$  και ακτίνα  $\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , με εξαίρεση το σημείο του  $O(0, 0)$

δ) 1ος τρόπος: Αν  $M(x_1, y_1)$  σημείο της παραβολής, τότε η εξίσωση εφαπτομένης της στο  $M$  είναι:

$$yy_1 = 2(x + x_1) \Leftrightarrow 2x - y_1y + 2x_1 = 0 \text{ με } \lambda_{\varepsilon\varphi} = \frac{2}{y_1}$$

Αν η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία  $(\varepsilon)$  τότε:

$$\lambda_{\varepsilon\varphi} = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{y_1} = 1 \Leftrightarrow y_1 = 2 \text{ και } x_1 = 1$$

Άρα το σημείο  $M(1, 2)$ , απέχει ελάχιστη απόσταση από την ευθεία  $(\varepsilon)$ , (απόσταση παραλλήλων ευθειών).

2ος τρόπος:

Αν  $M(x, y)$  είναι σημείο της παραβολής, τότε:

$$d(M, \varepsilon) = \frac{|x - y + 2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{\left|\frac{y^2}{4} - y + 2\right|}{\sqrt{2}} = \frac{|y^2 - 4y + 8|}{4\sqrt{2}} = \frac{y^2 - 4y + 8}{4\sqrt{2}}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(y) = y^2 - 4y + 8$ ,  $y \in \mathbb{R}$ . Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και για κάθε  $y \in \mathbb{R}$  έχουμε:

$$f'(y) = 2y - 4$$

Είναι:

- $f'(y) = 0 \Leftrightarrow 2y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = 2$
- $f'(y) > 0 \Leftrightarrow 2y - 4 > 0 \Leftrightarrow y > 2$

Το πρόσημο της  $f'(y)$  καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης  $f$  φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(y)$	-	0	+
$f(y)$	↘		↗

ελαχ.

Η συνάρτηση  $f$  παίρνει ελάχιστη τιμή για  $y = 2$ . Για  $y = 2$  είναι  $x = 1$ , οπότε το σημείο  $M(1, 2)$  απέχει ελάχιστη απόσταση από την ευθεία  $(\varepsilon)$ .

ε) Λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 4x \\ x^2 + y^2 + x + y = 0 \end{cases} \stackrel{y < 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\begin{cases} y = -2\sqrt{x} & (4) \\ x^2 + 5x - 2\sqrt{x} = 0 & (5) \end{cases}$$

Επειδή  $y < 0$  από τη σχέση (4) συμπεραίνουμε ότι  $x > 0$

Για  $x > 0$  η σχέση (5) ισοδύναμα γράφεται:

$$\frac{x^2}{\sqrt{x}} + 5\frac{x}{\sqrt{x}} - 2 = 0 \Leftrightarrow x\sqrt{x} + 5\sqrt{x} - 2 = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = x\sqrt{x} + 5\sqrt{x} - 2$ ,  $x > 0$

Η συνάρτηση  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  με  $g'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{5}{2\sqrt{x}}$ ,  $x > 0$

Είναι:

$$g'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Άρα η συνάρτηση  $g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $A = (0, +\infty)$

Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x\sqrt{x} + 5\sqrt{x} - 2) = -2$$

και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x\sqrt{x} + 5\sqrt{x} - 2) = +\infty$$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $g$  είναι  $g(A) = (-2, +\infty)$

Το  $0 \in g(A)$  και η συνάρτηση  $g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $A$ , οπότε η εξίσωση  $g(x) = 0$  έχει μοναδική ρίζα στο  $A = (0, +\infty)$

Συνεπώς υπάρχει μοναδικός μιγαδικός  $z$  με  $z = w$  και  $\text{Im}(z) < 0$

### ΘΕΜΑ 12ο :

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$  όπου  $a, b, \gamma \in \mathbb{R}$  για τους οποίους ισχύει  $\beta^2 < 3a\gamma$

α) Να αποδείξετε ότι η  $f(x) = 0$  έχει δύο μιγαδικές ρίζες  $z_1, z_2$

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός  $w = \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$  είναι πραγματικός και μικρότερος της μονάδας.

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = xe^x$ ,  $x > 0$ . Να αποδείξετε ότι:

i) Υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in (0, +\infty)$  τέτοιος, ώστε να ισχύει  $f(x_0) \cdot g(x_0) = a$

ii) Η συνάρτηση  $h(x) = \frac{g(x)f(x_0) - a}{f(x_0)(x - x_0)}$  είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε διάστημα του πεδίου ορισμού της.

## ΛΥΣΗ

α) Είναι  $a \neq 0$ , διότι αν ήταν  $a = 0$ , τότε από τη σχέση  $\beta^2 < 3\alpha\gamma$  προκύπτει  $\beta^2 < 0$  που είναι άτοπο, αφού  $\beta \in \mathbb{R}$ . Άρα το  $f(x)$  είναι τριώνυμο  $2^{\text{ου}}$  βαθμού, για τη διακρίνουσα  $\Delta$  του οποίου έχουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \quad \text{και} \quad \beta^2 < 3\alpha\gamma$$

οπότε

$$\Delta < 3\alpha\gamma - 4\alpha\gamma \Rightarrow \Delta < -\alpha\gamma \Rightarrow \Delta < 0$$

αφού

$$0 \leq \beta^2 < 3\alpha\gamma \Rightarrow \alpha\gamma > 0 \Rightarrow -\alpha\gamma < 0$$

Επομένως η εξίσωση έχει δύο μιγαδικές (συζυγείς) ρίζες  $z_1, z_2$

β) Ισχύουν:

$$z_1 + z_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{και} \quad z_1 \cdot z_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$$

Επίσης

$$z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + z_2)^2 - 2z_1 \cdot z_2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} - 2\frac{\gamma}{\alpha}$$

οπότε

$$w = \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = \frac{z_1^2 + z_2^2}{z_1 z_2} = \frac{\frac{\beta^2}{\alpha^2} - 2\frac{\gamma}{\alpha}}{\frac{\gamma}{\alpha}} = \frac{\beta^2 - 2\alpha\gamma}{\alpha\gamma} \in \mathbb{R}$$

Επιπλέον

$$w = \frac{\beta^2 - 2\alpha\gamma}{\alpha\gamma} < \frac{3\alpha\gamma - 2\alpha\gamma}{\alpha\gamma} = \frac{\alpha\gamma}{\alpha\gamma} = 1$$

οπότε

$$w < 1$$

γ) i) Είναι:

$$f(x) \cdot g(x) = \alpha \Leftrightarrow (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x) e^x = \alpha \Leftrightarrow$$

$$\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x = \alpha e^{-x} \Leftrightarrow x^3 + \frac{\beta}{\alpha} x^2 + \frac{\gamma}{\alpha} x - e^{-x} = 0$$

Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση  $x^3 + \frac{\beta}{\alpha} x^2 + \frac{\gamma}{\alpha} x - e^{-x} = 0$  έχει μοναδική θετική λύση  $x_0$ .

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $\varphi(x) = x^3 + \frac{\beta}{\alpha} x^2 + \frac{\gamma}{\alpha} x - e^{-x}$ ,  $x \geq 0$

Η συνάρτηση  $\varphi$  είναι συνεχής στο  $[0, +\infty)$  και παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  με

$$\varphi'(x) = 3x^2 + 2\frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} + e^{-x}$$

Η διακρίνουσα  $\Delta$  του τριωνύμου  $3x^2 + 2\frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha}$  είναι:  $\Delta = 4\frac{\beta^2}{\alpha^2} - 12\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{4}{\alpha^2}(\beta^2 - 3\alpha\gamma) < 0$

και επειδή ο συντελεστής του  $x^2$ , στο τριώνυμο, είναι θετικός έχουμε:

$$3x^2 + 2\frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} > 0 \quad \text{για κάθε } x > 0$$

Επιπλέον  $e^{-x} > 0$  για κάθε  $x > 0$ , οπότε  $\varphi'(x) > 0$  στο  $(0, +\infty)$ . Άρα η συνάρτηση  $\varphi$  είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της και

- $\varphi(0) = -1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x^3 + \frac{\beta}{\alpha} x^2 + \frac{\gamma}{\alpha} x - e^{-x} \right) = +\infty$

αφού

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x^3 + \frac{\beta}{\alpha} x^2 + \frac{\gamma}{\alpha} x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

Επομένως για το σύνολο τιμών της  $\varphi$  έχουμε  $\varphi([0, +\infty)) = [-1, +\infty)$ .

Το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της  $\varphi$  και  $\varphi(0) \neq 0$ , οπότε θα υπάρξει  $x_0 \in (0, +\infty)$  και μάλιστα μοναδικό, αφού η συνάρτηση  $\varphi$  είναι γνησίως αύξουσα, ώστε  $\varphi(x_0) = 0$

Δηλαδή θα υπάρξει μοναδικό  $x_0 \in (0, +\infty)$  τέτοιος, ώστε  $f(x_0) \cdot g(x_0) = \alpha$  (1)

ii) Το πεδίο ορισμού της  $h$  είναι  $A_h = (0, x_0) \cup (x_0, +\infty)$ . Η συνάρτηση  $h$  της οποίας ο τύπος γράφεται

$$h(x) = \frac{g(x)f(x_0) - \alpha}{f(x_0)(x - x_0)} \stackrel{(1)}{=} \frac{g(x)f(x_0) - g(x_0)f(x_0)}{f(x_0)(x - x_0)} = \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

είναι παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της με

$$h'(x) = \frac{g'(x)(x - x_0) - g(x) + g(x_0)}{(x - x_0)^2} = \frac{1}{x - x_0} \left[ g'(x) - \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right] \quad (2)$$

Έστω  $x > x_0$ , τότε στο διάστημα  $[x_0, x]$  η συνάρτηση  $g$  ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του

Θ.Μ.Τ. Επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi_1 \in (x_0, x)$  τέτοιο, ώστε  $g'(\xi_1) = \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$  (3)

Από τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε:

$$h'(x) = \frac{1}{x - x_0} (g'(x) - g'(\xi_1))$$

Η  $g$  είναι δυο φορές παραγωγίσιμη με

- $g'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$  και
- $g''(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x > 0$  για κάθε  $x > x_0 > 0$

Επομένως η συνάρτηση  $g'$  είναι γνησίως αύξουσα, οπότε για κάθε  $x > \xi_1$  έχουμε  $g'(x) > g'(\xi_1)$  και κατά συνέπεια

$$h'(x) = \frac{1}{x - x_0} (g'(x) - g'(\xi_1)) > 0 \quad \text{για κάθε } x > x_0 > 0$$

Άρα η συνάρτηση  $h$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $(x_0, +\infty)$

Έστω  $0 < x < x_0$ , τότε στο διάστημα  $[x, x_0]$  η συνάρτηση  $g$  ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του

Θ.Μ.Τ. Επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi_2 \in (x, x_0)$  τέτοιο, ώστε  $g'(\xi_2) = \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$  (4)

Από τις σχέσεις (2) και (4) έχουμε:

$$h'(x) = \frac{1}{x - x_0} (g'(x) - g'(\xi_2))$$

Η  $g$  είναι δυο φορές παραγωγίσιμη με

- $g'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$  και
- $g''(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x > 0$  για κάθε  $x \in (0, x_0)$

Επομένως η συνάρτηση  $g'$  είναι γνησίως αύξουσα, οπότε για κάθε  $x < \xi_2$  έχουμε  $g'(x) < g'(\xi_2)$  και κατά συνέπεια

$$h'(x) = \frac{1}{x - x_0} (g'(x) - g'(\xi_2)) > 0 \text{ για κάθε } x \in (0, x_0)$$

Άρα η συνάρτηση  $h$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $(0, x_0)$

### ΘΕΜΑ 13ο :

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί  $z, w$  οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση:

$$|z\bar{w} + 2i| = |z| \cdot |w|$$

α) Να αποδείξετε ότι  $\text{Im}(\bar{z}w) = 1$

β) Να αποδείξετε ότι  $|z|^2 + |w|^2 + \text{Re}(\bar{z}w) \geq \sqrt{3}$

γ) Αν  $|z|^2 + |w|^2 + \text{Re}(\bar{z}w) = \sqrt{3}$ , να αποδείξετε ότι  $|z|^2 = |w|^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

δ) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης  $\frac{|z|^2 |w|^2}{|z|^2 |w|^2 + \text{Re}(\bar{z}w)}$

### ΛΥΣΗ

α) 1<sup>ος</sup> τρόπος:

Είναι:

$$|z\bar{w} + 2i| = |z| \cdot |w| \Leftrightarrow$$

$$|z\bar{w} + 2i|^2 = |z|^2 \cdot |w|^2 \Leftrightarrow$$

$$(z\bar{w} + 2i) \cdot (\overline{z\bar{w} + 2i}) = |z|^2 \cdot |w|^2 \Leftrightarrow$$

$$(z\bar{w} + 2i) \cdot (\bar{z}w + 2i) = |z|^2 \cdot |w|^2 \Leftrightarrow$$

$$(z\bar{w} + 2i) \cdot (\bar{z}w - 2i) = |z|^2 \cdot |w|^2 \Leftrightarrow$$

$$|z|^2 \cdot |w|^2 + 2i \cdot \bar{z}w - 2i \cdot z\bar{w} + 4 = |z|^2 \cdot |w|^2 \Leftrightarrow$$

$$2i \cdot (\bar{z}w - z\bar{w}) = -4 \Leftrightarrow 2i \cdot (\bar{z}w - \overline{\bar{z}w}) = -4 \Leftrightarrow$$

$$2i \cdot 2i \cdot \text{Im}(\bar{z}w) = -4 \Leftrightarrow -4 \cdot \text{Im}(\bar{z}w) = -4 \Leftrightarrow \text{Im}(\bar{z}w) = 1$$

2<sup>ος</sup> τρόπος:

Είναι:

$$|z\bar{w} + 2i| = |z| \cdot |w| \Leftrightarrow |\overline{z\bar{w} + 2i}| = |\bar{z}| \cdot |w| \Leftrightarrow$$

$$|\bar{z}w - 2i| = |\bar{z}w| \stackrel{\bar{z}w=u}{\Leftrightarrow} |u - 2i| = |u| \Leftrightarrow |u - (0 + 2i)| = |u - (0 + 0i)|$$

Άρα η εικόνα του μιγαδικού  $u$  κινείται στη μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος  $OA$  με  $O(0, 0)$  και  $A(0, 2)$ , δηλαδή στην ευθεία με εξίσωση  $y = 1$ , οπότε  $\text{Im}(u) = 1 \Rightarrow \text{Im}(\bar{z}w) = 1$

β) Είναι:

$$\text{Im}(\bar{z}w) = 1$$

Άρα:

$$\bar{z}w = x + i \quad \text{με } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Από τη σχέση (1) και επειδή  $\bar{z} \neq 0$  έχουμε  $w = \frac{x+i}{\bar{z}}$  με  $x \in \mathbb{R}$ , οπότε είναι:

$$|w| = \left| \frac{x+i}{\bar{z}} \right| \Rightarrow |w| = \frac{|x+i|}{|\bar{z}|} \Rightarrow |w| = \frac{\sqrt{x^2+1}}{|z|} \quad (2)$$

Άρα έχουμε:

$$|z|^2 + |w|^2 + \text{Re}(\bar{z}w) \geq \sqrt{3} \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow}$$

$$|z|^2 + \frac{x^2+1}{|z|^2} + x \geq \sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$|z|^4 + x^2 + 1 + x|z|^2 \geq \sqrt{3} \cdot |z|^2 \Leftrightarrow$$

$$|z|^4 + (x - \sqrt{3})|z|^2 + x^2 + 1 \geq 0 \stackrel{y=|z|^2}{\Leftrightarrow}$$

$$y^2 + (x - \sqrt{3})y + x^2 + 1 \geq 0 \quad (3)$$

Η παράσταση  $y^2 + (x - \sqrt{3})y + x^2 + 1$  είναι τριώνυμο ως προς  $y$  με διακρίνουσα:

$$\begin{aligned} \Delta &= (x - \sqrt{3})^2 - 4(x^2 + 1) = x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 - 4x^2 - 4 = \\ &= -3x^2 - 2\sqrt{3}x - 1 = -(3x^2 + 2\sqrt{3}x + 1) = -(\sqrt{3}x + 1)^2 \leq 0 \end{aligned}$$

Άρα η ανισότητα (3) αληθεύει για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$ , οπότε ισχύει  $|z|^2 + |w|^2 + \text{Re}(\bar{z}w) \geq \sqrt{3}$

γ) Αν υποθέσουμε ότι  $\Delta < 0$ , τότε από το (β) ερώτημα προκύπτει ότι  $|z|^2 + |w|^2 + \text{Re}(\bar{z}w) > \sqrt{3}$ , που είναι άτοπο, άρα υποχρεωτικά είναι  $\Delta = 0$



Έχουμε:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow -(\sqrt{3}x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (4)$$

Είναι:

$$|z|^2 + |w|^2 + \operatorname{Re}(\bar{z}w) = \sqrt{3} \Leftrightarrow y^2 + (x - \sqrt{3})y + x^2 + 1 = 0$$

και δεδομένου ότι  $\Delta = 0$ , προκύπτει ότι:

$$y = \frac{-x + \sqrt{3}}{2} \stackrel{(4)}{\Rightarrow} y = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}}{2} \Rightarrow y = \frac{2\sqrt{3}}{3} \stackrel{y=|z|^2}{\Rightarrow} |z|^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad (5)$$

Από τη σχέση (2) έχουμε:

$$|w|^2 = \frac{x^2 + 1}{|z|^2} \stackrel{(2),(5)}{\Rightarrow} |w|^2 = \frac{\frac{1}{3} + 1}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow |w|^2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow |w|^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad (6)$$

Από τις σχέσεις (5) και (6) έχουμε:  $|z|^2 = |w|^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

δ) Είναι:

$$\begin{aligned} \frac{|z|^2 |w|^2}{|z|^2 |w|^2 + \operatorname{Re}(\bar{z}w)} &= \frac{|\bar{z}|^2 |w|^2}{|\bar{z}|^2 |w|^2 + \operatorname{Re}(\bar{z}w)} = \\ &= \frac{|\bar{z}w|^2}{|\bar{z}w|^2 + \operatorname{Re}(\bar{z}w)} \stackrel{(1)}{=} \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1 + x} = \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1} \end{aligned}$$

Θεωρούμε συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 + x + 1) - (x^2 + 1)(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + x + 1)^2}$$

Είναι:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ή } x > 1$

Επίσης έχουμε:

- $f(-1) = \frac{(-1)^2 + 1}{(-1)^2 + (-1) + 1} = \frac{2}{1} = 2$
- $f(1) = \frac{1^2 + 1}{1^2 + 1 + 1} = \frac{2}{3}$
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$

Το πρόσημο της  $f'(x)$  καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης  $f$  φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$1$	$2$	$\frac{2}{3}$	$1$	
		μεγ.	ελαχ.		

Η συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει μέγιστο στο  $x_1 = -1$  με τιμή  $f(-1) = 2$  και ελάχιστο στο  $x_2 = 1$  με ελάχιστη τιμή  $f(1) = \frac{2}{3}$ , άρα για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι  $\frac{2}{3} \leq f(x) \leq 2$

Άρα η ελάχιστη τιμή της παράστασης  $\frac{|z|^2|w|^2}{|z|^2|w|^2 + \operatorname{Re}(\bar{z}w)}$  είναι  $\frac{2}{3}$  και η μέγιστη τιμή της είναι 2

#### ΘΕΜΑ 14ο :

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς  $z$ , οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση:

$$|z + 2 - 4i|^2 + |z - 2 + 4i|^2 = 58$$

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών  $z$  είναι ο κύκλος με εξίσωση  $x^2 + y^2 = 9$  και να βρείτε τα κοινά σημεία του με τον άξονα  $y'y$

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός  $w = z + \frac{9}{z}$  είναι πραγματικός και για κάθε  $w$  ισχύει  $-6 \leq w \leq 6$

γ) Αν  $z_1, z_2$  και  $z_3$  είναι τρεις από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς, να αποδείξετε ότι:

$$|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1| = 3|z_1 + z_2 + z_3|$$

δ) Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί  $v$ , οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση:

$$v \cos \theta - i \eta \mu \theta = z(w - \bar{z}) + \bar{z}(w - z) + 2|z|^2 - |w|^2 + 3,$$

όπου  $\theta \in \mathbb{R}$  και  $\theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

i) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών  $v$  ανήκουν στην υπερβολή  $C: \frac{x^2}{9} - y^2 = 1$

ii) Να βρείτε τα σημεία της υπερβολής  $C: \frac{x^2}{9} - y^2 = 1$ , που απέχουν ελάχιστη απόσταση από το σημείο  $A(0,3)$

#### ΛΥΣΗ

Έστω  $z = x + yi$  με  $x, y \in \mathbb{R}$

α) Έχουμε:

$$|z + 2 - 4i|^2 + |z - 2 + 4i|^2 = 58 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
& |x + yi + 2 - 4i|^2 + |x + yi - 2 + 4i|^2 = 58 \Leftrightarrow \\
& |x + 2 + (y - 4)i|^2 + |x - 2 + (y + 4)i|^2 = 58 \Leftrightarrow \\
& (x + 2)^2 + (y - 4)^2 + (x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 58 \Leftrightarrow \\
& x^2 + 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 + x^2 - 4x + 4 + y^2 + 8y + 16 = 58 \Leftrightarrow \\
& 2x^2 + 2y^2 = 18 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 9 \Leftrightarrow C: x^2 + y^2 = 3^2
\end{aligned}$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $z$  είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο  $O(0,0)$  και ακτίνα  $\rho = 3$

Για  $x = 0$  έχουμε:

$$0^2 + y^2 = 3^2 \Leftrightarrow y^2 = 3^2 \Leftrightarrow y = 3 \text{ ή } y = -3$$

Οπότε τα κοινά σημεία του γεωμετρικού τόπου με τον άξονα  $y'y$  είναι τα  $A(0,3)$  και  $B(0,-3)$

**β)** Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $z$  είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο  $O(0,0)$  και ακτίνα  $\rho = 3$ , άρα ισχύει:

$$|z| = 3 \Leftrightarrow |z|^2 = 9 \Leftrightarrow z\bar{z} = 9 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{9}{z} \text{ ή } z = \frac{9}{\bar{z}} \quad (1)$$

Ισχύει:

$$\bar{w} = \bar{z} + \frac{9}{z} = \frac{9}{z} + z = w$$

Άρα ο  $w$  είναι πραγματικός αριθμός.

Επίσης έχουμε:

$$w = z + \frac{9}{z} = z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z) \quad (2)$$

Ισχύει  $|z| = 3$ , οπότε  $-3 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 3 \Leftrightarrow -6 \leq 2\operatorname{Re}(z) \leq 6 \Leftrightarrow -6 \leq w \leq 6$

**γ)** Για τους μιγαδικούς  $z_1, z_2$  και  $z_3$  ισχύουν οι σχέσεις:

$$z_1\bar{z}_1 = 9 \Leftrightarrow \bar{z}_1 = \frac{9}{z_1}, \quad z_2\bar{z}_2 = 9 \Leftrightarrow \bar{z}_2 = \frac{9}{z_2} \quad \text{και} \quad z_3\bar{z}_3 = 9 \Leftrightarrow \bar{z}_3 = \frac{9}{z_3}$$

Είναι:

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2 + z_3| &= |\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3| = \left| \frac{9}{z_1} + \frac{9}{z_2} + \frac{9}{z_3} \right| = \\
&= 9 \cdot \left| \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \right| = 9 \cdot \frac{|z_2z_3 + z_1z_3 + z_1z_2|}{|z_1z_2z_3|} = 9 \cdot \frac{|z_2z_3 + z_1z_3 + z_1z_2|}{|z_1| \cdot |z_2| \cdot |z_3|} = \\
&= \frac{9 \cdot |z_2z_3 + z_1z_3 + z_1z_2|}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{|z_2z_3 + z_1z_3 + z_1z_2|}{3}
\end{aligned}$$

Δείξαμε ότι:

$$|z_1 + z_2 + z_3| = \frac{|z_2z_3 + z_1z_3 + z_1z_2|}{3}$$

Άρα έχουμε:

$$|z_2z_3 + z_1z_3 + z_1z_2| = 3|z_1 + z_2 + z_3|$$

δ) i) Έχουμε:

$$\begin{aligned} \nu \sigma \nu \theta - i \eta \mu \theta &= z(w - \bar{z}) + \bar{z}(w - z) + 2|z|^2 - |w|^2 + 3 \Leftrightarrow \\ \nu \sigma \nu \theta - i \eta \mu \theta &= z \cdot w - z \cdot \bar{z} + \bar{z} \cdot w - z \cdot \bar{z} + 2z \cdot \bar{z} - |w|^2 + 3 \Leftrightarrow \\ \nu \sigma \nu \theta - i \eta \mu \theta &= z \cdot w + \bar{z} \cdot w - |w|^2 + 3 \Leftrightarrow \\ \nu \sigma \nu \theta - i \eta \mu \theta &= z \cdot w + \bar{z} \cdot w - w \cdot \bar{w} + 3 \Leftrightarrow \\ \nu \sigma \nu \theta - i \eta \mu \theta &= w \cdot (z + \bar{z} - \bar{w}) + 3 \Leftrightarrow \\ \nu \sigma \nu \theta - i \eta \mu \theta &= 2x \cdot (2x - 2x) + 3 \Leftrightarrow \\ \nu \sigma \nu \theta - i \eta \mu \theta &= 3 \Leftrightarrow \nu \sigma \nu \theta = 3 + i \eta \mu \theta \quad (3) \end{aligned}$$

Επειδή  $\theta \in \mathbb{R}$  και  $\theta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ ,  $\kappa \in \mathbb{Z}$  συμπεραίνουμε ότι  $\sigma \nu \nu \theta \neq 0$ , οπότε διαιρώντας και τα δύο μέλη της σχέσης (3) με  $\sigma \nu \nu \theta$  ισοδύναμα έχουμε:

$$v = \frac{3}{\sigma \nu \nu \theta} + i \frac{\eta \mu \theta}{\sigma \nu \nu \theta} \Leftrightarrow v = \frac{3}{\sigma \nu \nu \theta} + i \epsilon \varphi \theta$$

Αν θέσουμε  $v = \alpha + \beta i$  με  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , τότε έχουμε:

$$\frac{3}{\sigma \nu \nu \theta} = \alpha \Leftrightarrow \frac{1}{\sigma \nu \nu \theta} = \frac{\alpha}{3} \quad \text{και} \quad \epsilon \varphi \theta = \beta$$

Ισχύει:

$$\frac{1}{\sigma \nu \nu^2 \theta} = 1 + \epsilon \varphi^2 \theta, \quad \theta \in \mathbb{R} \quad \text{με} \quad \theta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

Οπότε έχουμε:

$$\frac{\alpha^2}{9} = 1 + \beta^2 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{9} - \beta^2 = 1$$

Άρα οι εικόνες των μιγαδικών  $v$  ανήκουν στην υπερβολή  $C: \frac{x^2}{9} - y^2 = 1$

ii) Έστω  $M(\alpha, \beta)$  σημείο της υπερβολής  $C: \frac{x^2}{9} - y^2 = 1$

Η απόσταση του σημείου  $A(0, 3)$  από το σημείο  $M(\alpha, \beta)$  είναι:

$$d(A, M) = d = \sqrt{(\alpha - 0)^2 + (\beta - 3)^2} = \sqrt{\alpha^2 + (\beta - 3)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 6\beta + 9} \quad (4)$$

Επειδή το σημείο  $M(\alpha, \beta) \in C$  έχουμε:

$$\frac{\alpha^2}{9} - \beta^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{9} = 1 + \beta^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = 9 + 9\beta^2$$

Με αντικατάσταση του  $\alpha^2$  στη σχέση (4) έχουμε:

$$d = \sqrt{9 + 9\beta^2 + \beta^2 - 6\beta + 9} = \sqrt{10\beta^2 - 6\beta + 18}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $d(\beta) = \sqrt{10\beta^2 - 6\beta + 18}$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$

Για κάθε  $\beta \in \mathbb{R}$  είναι:

$$d'(\beta) = \frac{(10\beta^2 - 6\beta + 18)'}{2\sqrt{10\beta^2 - 6\beta + 18}} = \frac{20\beta - 6}{2\sqrt{10\beta^2 - 6\beta + 18}} = \frac{10\beta - 3}{\sqrt{10\beta^2 - 6\beta + 18}}$$

Είναι:

- $d'(\beta) = 0 \Leftrightarrow 10\beta - 3 = 0 \Leftrightarrow 10\beta = 3 \Leftrightarrow \beta = \frac{3}{10}$
- $d'(\beta) > 0 \Leftrightarrow 10\beta - 3 > 0 \Leftrightarrow 10\beta > 3 \Leftrightarrow \beta > \frac{3}{10}$

Το πρόσημο της  $d'(\beta)$  καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης  $d$  φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

$\beta$	$-\infty$	$\frac{3}{10}$	$+\infty$	
$d'(\beta)$		-	0	+
$d(\beta)$		$\swarrow$		$\nearrow$

Ελάχιστο

Η συνάρτηση  $d$  παρουσιάζει ελάχιστο για  $\beta = \frac{3}{10}$

Βρίσκουμε τις τετμημένες των σημείων της υπερβολής με τεταγμένη  $\beta = \frac{3}{10}$

Έχουμε:

$$\frac{\alpha^2}{9} - \left(\frac{3}{10}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{9} = 1 + \frac{9}{100} \Leftrightarrow \alpha^2 = 9 \cdot \frac{109}{100} \Leftrightarrow \alpha = \pm \frac{3\sqrt{109}}{10}$$

Οπότε τα σημεία της υπερβολής που έχουν την ελάχιστη απόσταση από το σημείο  $A(0,3)$  είναι:

$$M_1\left(\frac{3\sqrt{109}}{10}, \frac{3}{10}\right) \text{ και } M_2\left(-\frac{3\sqrt{109}}{10}, \frac{3}{10}\right)$$

### ΘΕΜΑ 15ο :

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς  $z, w$  και τη συνάρτηση  $f(z) = z + 1 - i$  που ικανοποιούν τις σχέσεις:

- $|(1 + 2i)w - 5| = 3\sqrt{5}$
- $\overline{f(z)} = f(z)$

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών  $w$

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών  $z$

γ) Αν οι εικόνες των μιγαδικών  $w$  και  $z$  ανήκουν στον κύκλο με κέντρο  $K(1, -2)$  και ακτίνα  $R = 3$  και στην ευθεία  $y = 1$  αντιστοίχως, τότε:

- i) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί αριθμοί  $w$  και  $z$  για τους οποίους ισχύει  $z = w$
- ii) Να βρείτε τους  $w$ , που είναι πραγματικοί αριθμοί.
- iii) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του μέτρου  $|w - 5 + 6i|$

δ) Έστω  $M(x, y)$  η εικόνα ενός μιγαδικού αριθμού  $z$  με  $\operatorname{Re}(z) > 0$ , η οποία κινείται στην ευθεία  $y = 1$ . Αν το σημείο  $M$  απομακρύνεται από τον άξονα  $y'y$  και ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι ίσος με  $1 \text{ cm/s}$ , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας, την οποία σχηματίζει η διανυσματική ακτίνα του μιγαδικού  $z$  με τον άξονα  $x'x$ , τη χρονική στιγμή κατά την οποία το σημείο  $M$  διέρχεται από το σημείο  $(3, 1)$

## ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\begin{aligned} |(1+2i)w - 5| = 3\sqrt{5} &\Leftrightarrow \left| (1+2i) \left( w - \frac{5}{1+2i} \right) \right| = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow \\ |1+2i| \left| w - \frac{5(1-2i)}{5} \right| &= 3\sqrt{5} \Leftrightarrow |w - (1-2i)| = 3 \end{aligned}$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών  $w$  στο μιγαδικό επίπεδο είναι ο κύκλος με κέντρο  $K(1, -2)$  και ακτίνα  $R = 3$

β) Είναι:

$$\overline{f(z)} = f(z) \Leftrightarrow \bar{z} + 1 + i = z + 1 - i \Leftrightarrow z - \bar{z} = 2i \Leftrightarrow \begin{matrix} z = x + yi \\ \Leftrightarrow 2yi = 2i \Leftrightarrow y = 1 \end{matrix}$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών  $z$  στο μιγαδικό επίπεδο είναι η ευθεία με εξίσωση  $y = 1$

γ) i) Ο παραπάνω κύκλος και η ευθεία  $y = 1$  εφάπτονται, αφού  $d(K, \varepsilon) = \frac{|-2-1|}{\sqrt{1}} = 3 = R$ . Άρα υπάρχουν μοναδικοί αριθμοί  $w$  και  $z$  για τους οποίους ισχύει  $z = w$

ii) Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του  $w = x + yi$  στο μιγαδικό επίπεδο είναι ο κύκλος με κέντρο  $K(1, -2)$  και ακτίνα  $R = 3$ , που έχει εξίσωση  $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$

Για  $y = 0$  από την εξίσωση του κύκλου προκύπτει:

$$(x-1)^2 = 5 \Leftrightarrow x = \sqrt{5} + 1 \quad \text{ή} \quad x = -\sqrt{5} + 1$$

Επομένως οι αριθμοί  $w$ , που είναι πραγματικοί αριθμοί είναι:

$$w = \sqrt{5} + 1 + 0i = \sqrt{5} + 1 \quad \text{και} \quad w = -\sqrt{5} + 1 + 0i = -\sqrt{5} + 1$$

iii) Το μέτρο  $|w - (5 - 6i)|$  ισούται με την απόσταση της εικόνας του  $w$  από το σημείο  $A(5, -6)$ , που είναι η εικόνα του μιγαδικού  $5 - 6i$

Άρα η μέγιστη τιμή του μέτρου  $|w - (5 - 6i)|$  είναι:

$$\begin{aligned} |w - 5 + 6i|_{\max} &= (KA) + R = \sqrt{(5-1)^2 + (-6+2)^2} + 3 = \\ &= \sqrt{16+16} + 3 = \sqrt{32} + 3 = 4\sqrt{2} + 3 \end{aligned}$$

δ) Έστω  $\theta$  η γωνία που σχηματίζει η διανυσματική ακτίνα του μιγαδικού αριθμού  $z$  με τον άξονα  $x'x$ , τότε:

$$\varepsilon\phi\theta = \frac{y}{x} \stackrel{y=1}{\Rightarrow} \varepsilon\phi\theta = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

Επειδή η τετμημένη  $x$  μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου  $t$  είναι:

$$\varepsilon\phi\theta(t) = \frac{1}{x(t)}$$

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη ως προς  $t$  έχουμε:

$$\frac{1}{\sin^2\theta(t)} \cdot \theta'(t) = -\frac{x'(t)}{x^2(t)} \quad (1)$$

Όμως:

$$\frac{1}{\sin^2\theta(t)} = 1 + \varepsilon\phi^2\theta(t) \quad (2)$$

Η σχέση (1) με βάση τη σχέση (2) γράφεται:

$$(1 + \varepsilon\phi^2\theta(t)) \cdot \theta'(t) = -\frac{x'(t)}{x^2(t)} \quad (3)$$

Έστω  $t_0$  η χρονική στιγμή κατά την οποία το σημείο  $M$  διέρχεται από το σημείο  $(3,1)$ , τότε για  $t = t_0$  από τη σχέση (3) έχουμε:

$$(1 + \varepsilon\phi^2\theta(t_0)) \cdot \theta'(t_0) = -\frac{x'(t_0)}{x^2(t_0)} \quad (4)$$

Επίσης έχουμε:

$$x(t_0) = 3, \quad x'(t_0) = 1$$

και

$$1 + \varepsilon\phi^2\theta(t_0) = 1 + \frac{1}{x^2(t_0)} = 1 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (4) έχουμε:

$$\frac{10}{9} \cdot \theta'(t_0) = -\frac{1}{9} \Leftrightarrow \theta'(t_0) = -\frac{1}{10} \text{ rad / s}$$

Δηλαδή καθώς το σημείο  $M$  απομακρύνεται από τον άξονα  $y'y$  η γωνία της διανυσματικής ακτίνας του  $z$  με τον άξονα  $x'x$  μειώνεται.